

УДК 539.3

РАНГОВЫЙ КРИТЕРИЙ КЛАССИФИКАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЁБРАМИ

Малыгина Ирина Евгеньевна,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика», Российский университет транспорта, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, Москва, 127994, Российская Федерация.

E-mail: malygina_i.e@mail.ru

Аннотация

Рассматривается задача определения типа сингулярных точек равновесия сжатой пластины с продольными рёбрами при взаимодействии общей и местной форм выпучивания. Исследование выполнено на основе системы двух нелинейных уравнений относительно амплитуд взаимодействующих форм. Для классификации критических состояний сопоставляются ранги матрицы производных по обобщённым координатам и расширенной матрицы, дополненной столбцом производных по параметру нагрузки. Установлены условия применения рангового критерия на ветвях общего прогиба и связанных равновесий с начальными несовершенствами. Показано, что условие нулевого определителя необходимо дополнять проверкой ранга расширенной матрицы и условий невырожденности. На трёх проверочных примерах получены различающиеся ранговые признаки точки бифуркации и предельных точек. Для связанных равновесий рассмотрено использование дополнения Шура при ненулевом разрешающем элементе. Полученные соотношения могут применяться при классификации сингулярных точек в вычислительных процедурах построения диаграмм равновесия подкреплённых пластин.

Ключевые слова: подкреплённая пластина, продольные рёбра, взаимодействие форм выпучивания, сингулярная точка, матрица Гессе, ранг матрицы, предельная точка, бифуркация, начальные несовершенства.

RANK CRITERION FOR CLASSIFYING SINGULAR EQUILIBRIUM POINTS OF A PLATE WITH LONGITUDINAL STIFFENERS

Irina E. Malygina,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St., Bldg. 9, Moscow, 127994, Russian Federation.

E-mail: malygina_i.e@mail.ru

ABSTRACT

The classification of singular equilibrium points is considered for a compressed plate with longitudinal stiffeners subject to interaction between overall and local buckling modes. The analysis uses two nonlinear equilibrium equations in the modal amplitudes. Critical states are

classified by comparing the rank of the coordinate Jacobian with that of the augmented matrix containing the load derivative column. Conditions for applying the rank criterion are specified for the overall-deflection branch and coupled equilibria with initial imperfections. A zero determinant must be supplemented by the augmented-rank test and appropriate nondegeneracy checks. Three verification examples demonstrate distinct rank signatures for a bifurcation point and limit points. The Schur complement is considered for coupled equilibria when the pivot is nonzero. The resulting relations can support the classification of singular points in computational procedures for tracing equilibrium diagrams of stiffened plates.

Keywords: stiffened plate, longitudinal stiffeners, buckling mode interaction, singular point, Hessian matrix, matrix rank, limit point, bifurcation, initial imperfections.

Введение

При геометрически нелинейном расчёте подкреплённой пластины критическое состояние определяется не только величиной нагрузки, но и характером изменения равновесной конфигурации. Общая форма выпучивания сопровождается прогибом пластины и рёбер, тогда как местная форма связана с волнообразованием в отдельных элементах. Их взаимодействие приводит к появлению нескольких ветвей равновесия и требует различать предельные точки и точки бифуркации [1, 3, 5].

Обращение в нуль определителя матрицы производных по обобщённым координатам выявляет вырождение линеаризованной задачи. Однако это условие не определяет тип сингулярной точки. Для такой классификации необходимо учитывать изменение уравнений равновесия при варьировании нагрузки. Различие предельных точек и точек ветвления рассматривается в теории бифуркаций и в исследованиях критических состояний упругих систем [2, 4].

Цель работы состоит в применении рангового критерия к двухмодовой модели подкреплённой пластины и установлении условий его использования при наличии начальных геометрических несовершенств. Основное внимание уделяется согласованию алгебраических признаков вырождения с геометрией равновесных ветвей. Аналитическое рассмотрение дополняется проверочными вычислениями по той же системе уравнений.

Уравнения равновесия и матрица производных

Рассматривается тонкая упругая пластина с регулярно расположенными продольными рёбрами при продольном сжатии. Прямоугольные рёбра моделируются пластинами, соединёнными с основной пластиной по линиям сопряжения. Для описания регулярной конструкции выделяется Т-образный фрагмент, включающий ребро и прилегающую полосу пластины (рис. 1). Используемая модель учитывает взаимодействие общей формы выпучивания с одной местной формой [1, 3, 5].

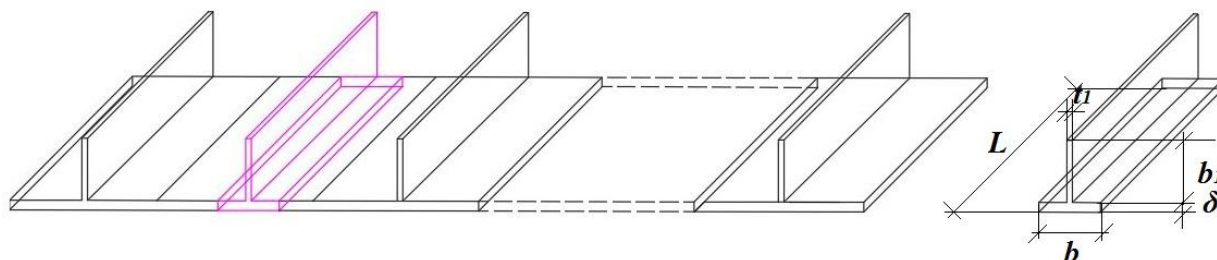


Рис. 1. Подкреплённая пластина и выделенный Т-образный фрагмент [1]

Обобщённые координаты ξ_1 и ξ_2 представляют амплитуды общей и местной форм, отнесённые к толщине пластины. Параметр λ характеризует нагрузку; λ_1 и λ_2 соответствуют критическим значениям линейных задач для этих форм. Начальные несовершенства

задаются относительными амплитудами $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$. В рассматриваемом приближении сохраняются квадратичные нелинейные члены уравнений равновесия [1, 3]:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \xi_1 + d_1 \xi_1^2 + d_2 \xi_2^2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} \bar{\xi}_1, \quad (1)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \xi_2 + d_3 \xi_1 \xi_2 = \frac{\lambda}{\lambda_2} \bar{\xi}_2, \quad (2)$$

$$\text{где: } d_1 = \frac{a_{111}}{a_1}, \quad d_2 = \frac{a_{122}}{a_1}, \quad d_3 = \frac{2a_{122}}{a_2}. \quad (3)$$

Положительные коэффициенты a_1 и a_2 характеризуют квадратичные, а a_{111} и a_{122} – кубические члены разложения потенциальной энергии по амплитудам форм. Уравнения (1), (2) образуют принятую здесь редуцированную модель. Результаты её анализа относятся к области применимости такого усечения; члены более высоких порядков могут изменять удалённые участки равновесных ветвей.

После переноса правых частей влево обозначим невязки уравнений через $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Производные по амплитудам образуют матрицу

$$H_{\Pi} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + 2d_1\xi_1 & 2d_2\xi_2 \\ d_3\xi_2 & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3\xi_1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Уравнения (1), (2) нормированы на коэффициенты a_1 и a_2 , поэтому матрица (4) является матрицей Якоби нормированной системы. Матрица Гессе соответствующей потенциальной энергии получается обратным масштабированием строк. При ненулевых a_1 и a_2 это преобразование не изменяет ранг матрицы и факт обращения определителя в нуль. Обозначение H_{Π} сохраняется для матрицы (4), а выводы об энергетической устойчивости должны относиться к симметричной матрице вторых производных потенциальной энергии.

Для расширения матрицы требуется столбец производных невязок по параметру нагрузки. При фиксированных амплитудах начальных несовершенств его компоненты имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \lambda} = -\frac{\xi_1 + \bar{\xi}_1}{\lambda_1}; \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \lambda} = -\frac{\xi_2 + \bar{\xi}_2}{\lambda_2}. \quad (5)$$

Матрица $H_{\Pi, \lambda}$ образуется присоединением этого столбца к двум столбцам H_{Π} и имеет размер 2×3 . При анализе несовершенной системы члены с начальными амплитудами в (5) должны сохраняться. Их исключение изменяет проверяемое условие линейной зависимости столбцов.

Ранговая классификация сингулярных точек

Пусть система содержит m уравнений равновесия и один параметр нагрузки. Все производные вычисляются в точке, удовлетворяющей уравнениям равновесия. Если определитель H_{Π} отличен от нуля, то по теореме о неявной функции координаты локально выражаются через нагрузку. Далее рассматривается простое вырождение в точке s :

$$\text{rang } H_{\Pi}(s) = m - 1. \quad (6)$$

В этом случае присоединение одного столбца может либо увеличить ранг на единицу, либо оставить его равным $m - 1$. Если столбец производных по нагрузке не принадлежит линейной оболочке столбцов H_{Π} , выполняется условие

$$\text{rang } H_{\Pi, \lambda}(s) = m, \quad (7)$$

Полный ранг расширенной матрицы означает, что множество решений локально представляет гладкую кривую. Дифференцирование уравнений вдоль неё и проектирование на левое ядро H_{Π} показывают, что в сингулярной точке производная нагрузки по параметру кривой равна нулю. Для обычной предельной точки дополнительно требуется ненулевая вторая производная нагрузки. Эквивалентно проверяется ненулевая проекция второй производной невязки вдоль правого нулевого вектора на левый нулевой вектор. Без этого условия возможна особенность более высокого порядка.

Если ранг расширенной матрицы остаётся равным $m - 1$, столбец производных по нагрузке линейно зависит от столбцов Нп. Это необходимый ранговый признак точки ветвления, однако сам по себе он не доказывает существование нескольких ветвей. Необходимо исследовать нелинейные члены и локальное множество решений. Для рассматриваемой модели дополнительную информацию даёт структура второго уравнения и симметрия относительно знака местной амплитуды при отсутствии соответствующего несовершенства.

При $m = 2$ проверка полного ранга расширенной матрицы сводится к вычислению её миноров второго порядка. В сингулярной точке исходный минор, равный определителю Нп, обращается в нуль. Если хотя бы один из двух миноров, содержащих столбец производных по нагрузке, ненулевой, расширенная матрица имеет ранг два. Если все такие миноры нулевые, при условии (6) её ранг равен единице.

Сингулярные точки на ветви общего прогиба

При отсутствии местного начального несовершенства система допускает ветвь $\xi_2 = 0$. На ней внедиагональные элементы Нп равны нулю. Поэтому вырождение может быть связано с обращением в нуль либо h_{11} , либо h_{22} . Случай их одновременного обнуления имеет более высокую кратность и выходит за пределы условия (6).

Условие $h_{11} = 0$ задаёт прямую в плоскости параметра нагрузки и амплитуды общего прогиба:

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = 1 + 2d_1\xi_1. \quad (8)$$

Если h_{22} отличен от нуля, ранг Нп равен единице. При ненулевой сумме текущей амплитуды общего прогиба и соответствующего начального несовершенства первая компонента столбца (5) ненулевая. Присоединение этого столбца увеличивает ранг до двух. При выполнении условия невырожденности второго порядка точка пересечения прямой (8) с ветвью равновесия является предельной.

В геометрически совершенной системе нельзя считать любое пересечение прямой (8) с множеством равновесий обычной предельной точкой. В частности, при нулевых амплитудах обе компоненты столбца производных по нагрузке равны нулю. Тогда признак (7) не выполняется и требуется отдельное исследование ветвления.

Обращение h_{22} в нуль определяет другую прямую:

$$\frac{\lambda}{\lambda_2} = 1 + d_3\xi_1. \quad (9)$$

При $\xi_2 = 0$ и отсутствии местного несовершенства вторая компонента столбца (5) также равна нулю. Если h_{11} ненулевой, расширенная матрица имеет только одну ненулевую строку и её ранг остаётся равным единице. Для проверки ветвления второе уравнение разделяется на решения с нулевой местной амплитудой и решения с ненулевой местной амплитудой. Последние удовлетворяют условию $h_{22} = 0$. Подстановка этого условия в первое уравнение позволяет определить наличие двух симметричных ветвей с противоположными знаками ξ_2 .

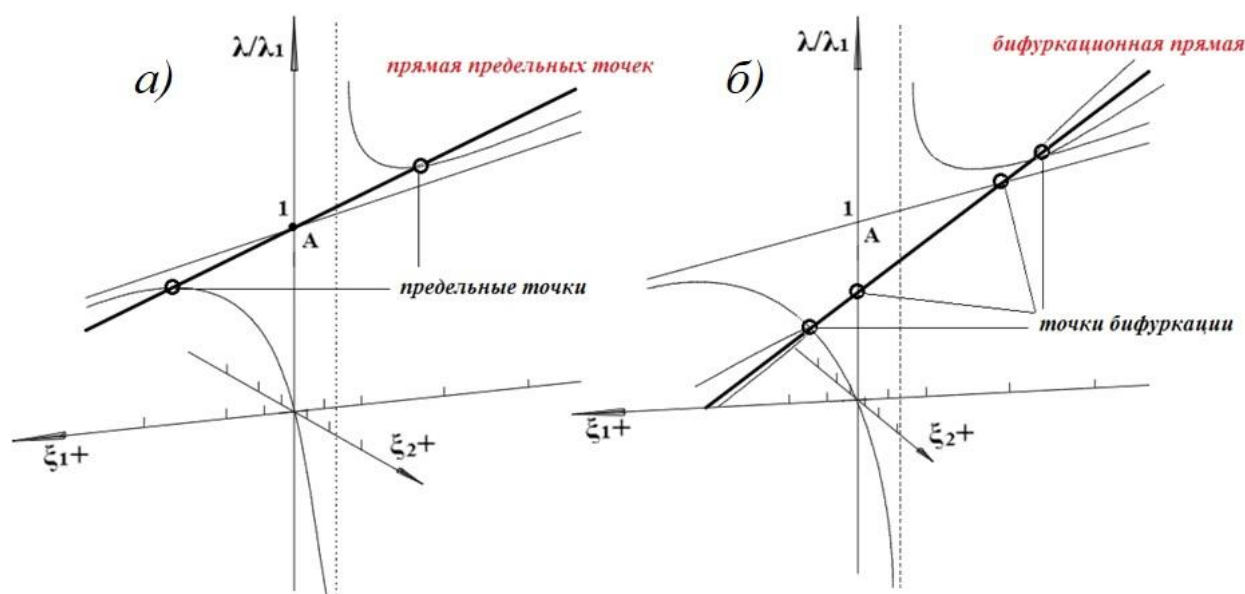


Рис. 2. Прямые сингулярных точек: а – предельных; б – бифуркационных [1]

На рис. 2 представлены схемы пересечения указанных прямых с кривыми равновесия. При использовании такого построения необходимо проверять исходные уравнения и ранговые условия в каждой найденной точке. Сама прямая содержит также точки, не принадлежащие рассматриваемой равновесной ветви.

Связанные равновесия и начальные несовершенства

При ненулевой местной амплитуде и отсутствии местного несовершенства из второго уравнения равновесия следует

$$h_{22} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) + d_3 \xi_1 = 0. \quad (10)$$

Матрица производных принимает вид

$$H_{\Pi} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) + 2d_1 \xi_1 & 2d_2 \xi_2 \\ d_3 \xi_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Её определитель равен взятому с противоположным знаком произведению внедиагональных элементов. При ненулевых d_2 , d_3 и ξ_2 он отличен от нуля. Следовательно, на этом участке связанной ветви матрица невырожденная. Этот вывод относится к принятому квадратичному приближению уравнений и не распространяется автоматически на более полную нелинейную модель.

При наличии местного начального несовершенства правая часть второго уравнения ненулевая для ненулевой нагрузки, и условие (10) в общем случае не выполняется. Вырождение определяется полным выражением

$$\det H_{\Pi}(\xi_2) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}. \quad (12)$$

Если h_{22} отличен от нуля, исключение одной из переменных приводит к дополнению Шура

$$t_2 = h_{11} - \frac{h_{21}h_{12}}{h_{22}} \quad (13)$$

Определитель H_{Π} равен произведению h_{22} и t_2 , поэтому при выбранном ненулевом разрешающем элементе равенство t_2 нулю эквивалентно вырождению матрицы. Оно ещё не определяет тип сингулярной точки: после вычисления t_2 необходимо применить ранговый критерий к расширенной матрице. При нулевом либо слишком малом h_{22} следует использовать другой разрешающий элемент или прямое исследование матрицы.

Начальное несовершенство по местной форме нарушает симметрию относительно изменения знака ξ_2 и изменяет компоненты столбца производных по нагрузке. В результате условия вырождения и классификация критической точки могут измениться. Утверждение

о появлении предельной точки требует проверки: наличие ненулевого несовершенства само по себе не гарантирует полного ранга расширенной матрицы.

Проверочные вычисления

Для проверки ранговых признаков использованы коэффициенты варианта с местным волнообразованием в пластине [1]: $d_1 = -0,0069$; $d_2 = -0,503$; $d_3 = -0,051$. Параметры нагрузки нормированы следующим образом:

$$\mu_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \mu_2 = k\mu_1, k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (14)$$

Приняты $\lambda_1 = 1$ и $k = 1,287$. Амплитуда начального несовершенства по общей форме равна 0,5. Рассмотрены три состояния: предельная точка на ветви общего прогиба; точка возникновения местного волнообразования при нулевом местном несовершенстве; предельная точка связанного равновесия при местном несовершенстве 0,01. Коэффициенты модели и значение общего несовершенства взяты из расчётного варианта [1], а значение 0,01 выбрано для проверки изменения типа особенности.

Расчёт выполнен с помощью вычислительного комплекса, написанного на языке Python. Координаты предельных точек определялись совместным решением уравнений равновесия и условия нулевого определителя методом Ньютона с аналитической матрицей производных и уменьшением шага при необходимости. Для точки бифуркации использованы уравнение общего прогиба и условие $h_{22} = 0$. Ранги вычислялись по сингулярным числам с относительными порогами от 10^{-11} до 10^{-7} ; в указанном диапазоне классификация не менялась.

Таблица 1

Координаты сингулярных точек и результаты ранговой проверки

№	$\bar{\xi}_2$	ξ_1	ξ_2	μ_1	Ранг Нп	Ранг Нп,Л
1	0,0	8,027237	0,000000	0,889224	1	2
2	0,0	1,353194	0,000000	0,723378	1	1
3	0,01	1,443718	0,366205	0,700658	1	2

Примечание. Во всех случаях начальное несовершенство по общей форме равно 0,5; $\lambda_1 = 1$. Состояния 1 и 3 – предельные точки, состояние 2 – точка бифуркации. Значения рассчитаны по уравнениям (1), (2).

Для всех трёх состояний максимальная по модулю невязка исходных уравнений не превышает $3 \cdot 10^{-16}$, а модуль определителя Нп – $8 \cdot 10^{-18}$. Эти оценки получены по неокруглённым координатам. В таблице приведены округлённые значения; их непосредственная подстановка даёт большую невязку.

В состояниях 1 и 3 ранг расширенной матрицы равен двум. Её меньшие сингулярные числа составляют соответственно 0,553821 и 0,138418. Дополнительно проверены ненулевые проекции столбца производных по нагрузке и второй производной невязки в нулевом направлении. Таким образом, в обоих случаях выполнены условия обычной предельной точки.

В состоянии 2 оба ранга равны единице. Наличие ветвления установлено по структуре уравнений: после выделения множителя ξ_2 второе уравнение задаёт связанную ветвь условием $h_{22} = 0$. Подстановка в первое уравнение даёт локальную зависимость от квадрата местной амплитуды с ненулевой производной по ξ_1 . Поэтому в окрестности найденной точки существуют два решения, соответствующие противоположным знакам местной амплитуды.

Предельная точка 1 расположена на ветви общего прогиба при нагрузке выше нагрузки бифуркации 2. В состоянии 1 элемент h_{22} отрицателен. Поэтому эту предельную точку нельзя отождествлять с первой потерей устойчивости при нагружении из исходного состояния. Пример показывает необходимость отдельно устанавливать геометрический тип особенности и устойчивость соответствующей ветви.

При выбранном местном несовершенстве 0,01 получена предельная точка связанного равновесия с параметром нагрузки 0,700658. Это на 3,14 % ниже значения 0,723378 для точки бифуркации при нулевом местном несовершенстве. Результат характеризует рассмотренный набор коэффициентов и служит проверкой применения рангового критерия к несовершенной модели; он не является универсальной оценкой снижения критической нагрузки.

Заключение

Сопоставление рангов матрицы производных по амплитудам и расширенной матрицы позволяет различать алгебраические признаки простых сингулярных точек двухмодовой модели подкреплённой пластины. Увеличение ранга до полного при дополнительном условии невырожденности второго порядка соответствует обычной предельной точке. Сохранение пониженного ранга требует исследования нелинейных членов для подтверждения ветвления.

На ветви общего прогиба условия обнуления h_{11} и h_{22} приводят к различным ранговым признакам. При связанных равновесиях с начальными несовершенствами необходимо использовать полный определитель и столбец производных по нагрузке с учётом начальных амплитуд. Дополнение Шура может применяться для выявления вырождения при ненулевом разрешающем элементе, но не заменяет классификацию по расширенной матрице.

Проверочные вычисления подтвердили различие рангов в точке бифуркации и в двух предельных точках. Показано также, что предельная точка на продолжении ветви общего прогиба может следовать за бифуркацией по местной форме. Поэтому при оценке несущей способности ранговую классификацию следует сочетать с анализом устойчивости и последовательности прохождения критических состояний.

Список литературы:

1. Грудцына И. Е. Устойчивость тонких подкреплённых пластин с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания: дис. ... канд. техн. наук: 2.1.9. М.: Российский университет транспорта, 2023.
2. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
3. Маневич А. И. Взаимодействие форм потери устойчивости сжатой подкреплённой панели // Строительная механика и расчет сооружений. 1981. № 5. С. 24–29.
4. Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Polyakov V. U., Begichev M. M. Features and Computational Differences of Critical Points on the Equilibrium Curve // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2017. Vol. 12. P. 136–146.
5. Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Grudtsyna I. E. Geometric Representations of Equilibrium Curves of a Compressed Stiffened Plate // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. Vol. 17, No. 3. P. 83–93. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-3-83-93.

References:

1. Grudtsyna I. E. Stability of thin stiffened plates taking into account buckling eigenmode interaction. Candidate of Technical Sciences dissertation, specialty 2.1.9. Moscow: Russian University of Transport; 2023. (In Russian).
2. Iooss G., Joseph D. D. Elementary stability and bifurcation theory. Russian edition. Moscow: Mir; 1983. 300 p. (In Russian).

3. Manevich A. I. Interaction of buckling modes of a compressed stiffened panel. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 1981;(5):24–29. (In Russian).
4. Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Polyakov V. U., Begichev M. M. Features and Computational Differences of Critical Points on the Equilibrium Curve. WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2017; 12:136–146.
5. Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Grudtsyna I. E. Geometric Representations of Equilibrium Curves of a Compressed Stiffened Plate. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021;17(3):83–93. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-3-83-93.