

УДК 539.3

ВЫБОР КРИТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ МЕСТНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ПЛАСТИНЫ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЁБРАМИ

Малыгина Ирина Евгеньевна,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика», Российский университет транспорта, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, Москва, 127994, Российская Федерация.

E-mail: malygina_i.e@mail.ru

Аннотация

Рассматривается линейная задача устойчивости регулярно подкреплённой пластины при продольном сжатии. Продольные рёбра имеют прямоугольное сечение и моделируются пластинами. Цель исследования – определение критических напряжений местного выпучивания и соответствующего числа продольных полуволн. Используются аналитические решения изгибных задач для обшивки и ребра, а также условия сопряжения на линии их контакта. Численное решение характеристического уравнения выполнено с использованием вычислительного комплекса, написанного на языке Python. Для четырёх геометрических вариантов проведено сопоставление с расчётными данными А. И. Маневича. В диапазоне от одной до шестнадцати продольных полуволн минимальным критическим напряжениям соответствуют числа 6, 7, 7 и 5. Эти значения совпадают с указанными расчётными данными; относительные расхождения напряжений составляют 0,11–0,91 %. Для трёх вариантов разность между двумя наименьшими значениями напряжения, полученными при различных числах полуволн, составляет 0,85–1,07 % от минимального значения. Полученные результаты характеризуют зависимость выбора критической местной формы от числа продольных полуволн в исследованном диапазоне.

Ключевые слова: подкреплённая пластина, продольное ребро, местное выпучивание, характеристическое уравнение, критическое напряжение, число полуволн.

SELECTION OF THE CRITICAL LOCAL BUCKLING MODE OF A PLATE WITH LONGITUDINAL STIFFENERS

Irina E. Malygina,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St., Bldg. 9, Moscow, 127994, Russian Federation.

E-mail: malygina_i.e@mail.ru

ABSTRACT

The linear stability of a regularly stiffened plate under longitudinal compression is considered. The longitudinal stiffeners have rectangular cross-sections and are modeled as plates.

The study determines the critical local buckling stresses and the corresponding numbers of longitudinal half-waves. Analytical bending solutions for the plate and stiffener are combined with compatibility and equilibrium conditions at their junction. The characteristic equation is solved numerically using a computational software system written in Python. Four geometrical configurations are compared with reference calculations reported by A. I. Manevich. For one to sixteen longitudinal half-waves, the minimum critical stresses correspond to half-wave numbers of 6, 7, 7 and 5. These numbers agree with the reference data, while the relative differences in critical stress range from 0.11 to 0.91%. For three configurations, the two lowest stress values obtained at different half-wave numbers differ by 0.85–1.07% of the minimum value. The results describe the dependence of critical local mode selection on the number of longitudinal half-waves within the investigated range.

Keywords: stiffened plate, longitudinal stiffener, local buckling, characteristic equation, critical stress, half-wave number.

Введение

При продольном сжатии регулярно подкреплённой пластины критическое напряжение определяется геометрическими параметрами панели и формой выпучивания. В линейной постановке каждому числу продольных полуволн соответствует характеристическое уравнение. Определение критической местной формы требует решения этого уравнения при различных числах полуволн и выбора наименьшего критического напряжения.

Линейная задача устойчивости подкреплённой пластины решается с использованием аналитических зависимостей [2]. Перемещения обшивки и ребра представляются через аналитические решения соответствующих краевых задач. Условия совместности перемещений и равновесия усилий на линии контакта приводят к характеристическим уравнениям общей и местной форм выпучивания. Моделирование рёбер пластинами позволяет учитывать их изгибную деформацию [3–5]. Общие положения теории устойчивости упругих пластин изложены в [1].

Цель настоящей работы – определение критических напряжений местного выпучивания и соответствующего числа продольных полуволн на основе численной реализации аналитического решения [2]. Расчёты выполнены с использованием вычислительного комплекса, написанного на языке Python. Для четырёх геометрических вариантов определены минимальные критические напряжения, проведено сопоставление с результатами [5] и исследована близость значений, соответствующих различным числам полуволн.

Расчётная схема и аналитические зависимости

Рассматривается упругая изотропная пластина, регулярно подкреплённая одинаковыми продольными рёбрами прямоугольного сечения и находящаяся под действием равномерного продольного сжатия. Рёбра моделируются пластинами. Торцевые сечения шарнирно опёрты. В обозначениях [2] L – длина панели, b – шаг рёбер, δ – толщина обшивки, b_1 и t_1 – высота и толщина ребра. Безразмерный параметр ω равен отношению площади поперечного сечения ребра к площади поперечного сечения полосы обшивки шириной b . Модуль упругости обозначен E , коэффициент Пуассона – ν .

Общий вид подкреплённой пластины и выделенный регулярный Т-образный фрагмент представлены на рис. 1. Фрагмент включает одно продольное ребро и примыкающие к нему участки обшивки общей шириной b . На геометрической схеме

толщина обшивки обозначена δ ; в приведённых далее аналитических соотношениях ей соответствует обозначение δ [2].

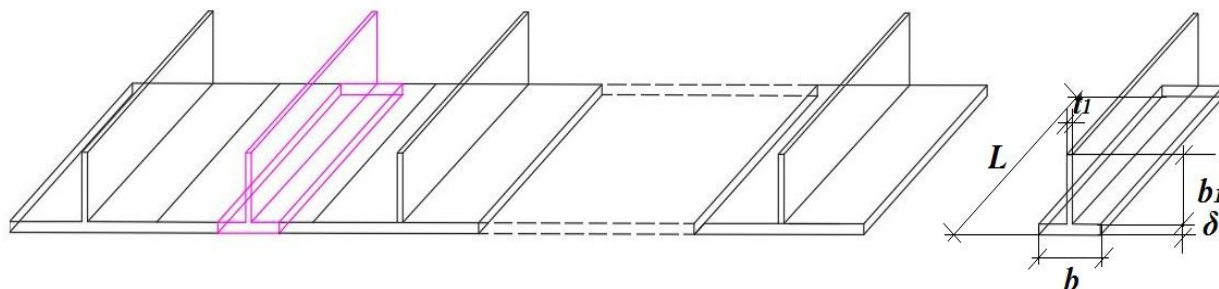


Рис. 1. Подкреплённая пластина и геометрические параметры регулярного Т-образного фрагмента [2].

Схема опирания и нагружения Т-образного фрагмента показана на рис. 2. По коротким сторонам задано шарнирное опирание, по продольным сторонам – плавающие заделки. Сжимающая сила приложена в центре тяжести поперечного сечения [2].

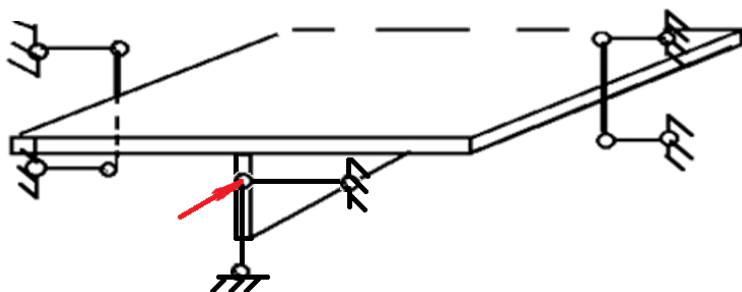


Рис. 2. Граничные условия и нагружение Т-образного фрагмента [2].

Начало поперечной координаты обшивки расположено посередине между соседними рёбрами; линия контакта соответствует $\eta = 0,5$. Координата η отсчитывается по высоте ребра от линии контакта. При местном выпучивании прогиб обшивки на этой линии равен нулю, а угол поворота определяется условиями сопряжения. Период формы в поперечном направлении равен удвоенному шагу рёбер [2].

Система координат и силовые факторы в пластине показаны на рис. 3, системы координат ребра – на рис. 4. Продольное и поперечное перемещения обшивки обозначены U и V , прогиб – W . Перемещения ребра рассматриваются в местной системе координат с началом на линии контакта [2].

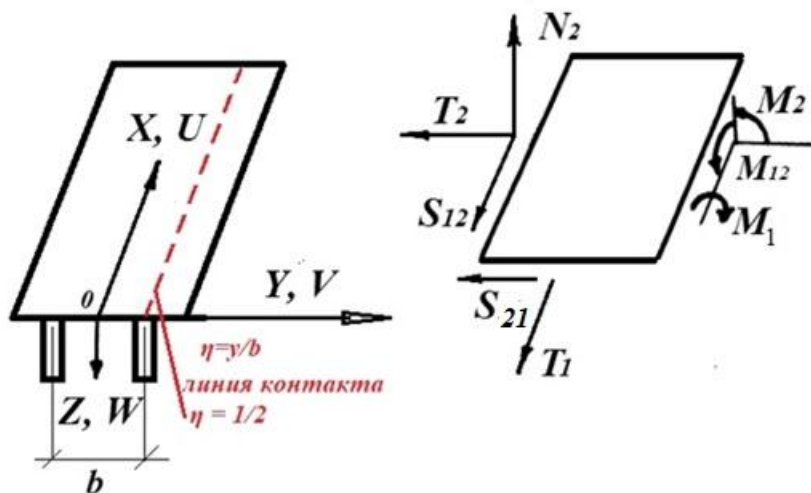


Рис. 3. Система координат и силовые факторы в пластине [2].

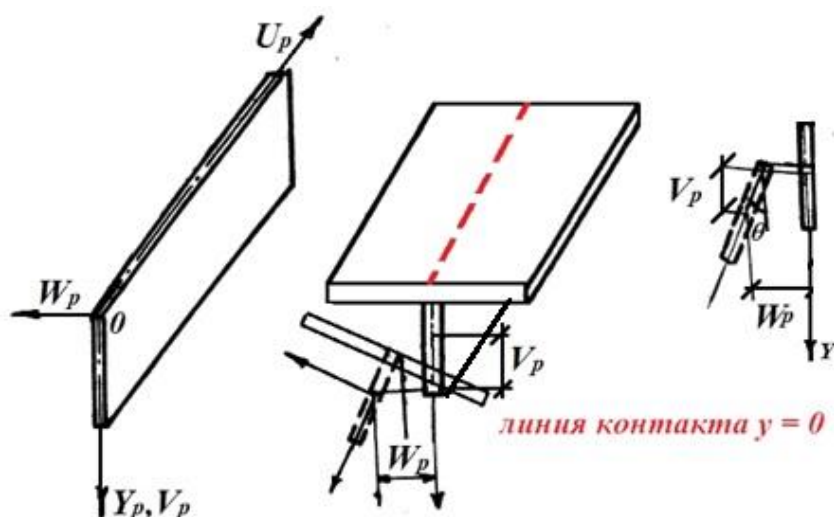


Рис. 4. Системы координат для ребра [2].

В соответствии с условиями шарнирного опирания торцов продольная зависимость прогиба принимается синусоидальной. Число продольных полуволн m является целым положительным параметром решения:

$$W(\xi, \eta) = W(\eta) \sin \alpha_m \xi, \quad (1)$$

$$\alpha_m = m\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi b}{L}. \quad (2)$$

Здесь ξ и η – безразмерные продольная и поперечная координаты, отнесённые к шагу рёбер b . Для симметричного относительно середины пролёта изгиба обшивки решение записывается через две фундаментальные функции. Прогиб и его производная связаны с постоянными интегрирования следующим матричным соотношением [2]:

$$\begin{bmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} \end{bmatrix} = B_m(\eta) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad B_m(\eta) = \begin{bmatrix} ch\beta_1\eta & ch\beta_2\eta \\ \beta_1 sh\beta_1\eta & \beta_2 sh\beta_2\eta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\beta_{1,2}^2 = \left[\alpha_m^2 \pm \frac{\alpha_m}{c} \sqrt{-\bar{T}_1^0} \right]. \quad (4)$$

В (3), (4) C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; c – безразмерный параметр изгибной жёсткости, определяемый относительной толщиной обшивки и коэффициентом Пуассона [2]. Продольное усилие исходного состояния принято отрицательным при сжатии. Параметры β определяют вид фундаментальных решений. При их мнимых значениях гиперболические функции выражаются через тригонометрические. В вычислительной реализации используется комплексное представление базисных функций.

При моделировании ребра пластиной решение изгибной задачи принимается с тем же числом продольных полуволн. Различие граничных условий на линии контакта и свободной кромке требует использования четырёх фундаментальных функций:

$$W_p(\xi, \eta_p) = W_p(\eta_p) \sin \alpha_m \xi \quad (5)$$

$$W_p = C_1 ch\beta_{p1}\eta_p + C_2 sh\beta_{p1}\eta_p + C_3 ch\beta_{p2}\eta_p + C_4 sh\beta_{p2}\eta_p, \quad (6)$$

Параметры β_{p1} и β_{p2} определяются для ребра аналогично параметрам изгибного решения обшивки. Постоянные интегрирования C_1 – C_4 в (6) находятся из граничных условий ребра. На свободной кромке изгибающий момент и приведённая поперечная сила равны нулю. На линии контакта выполняются условия сопряжения по прогибу и углу поворота. Исключение постоянных интегрирования даёт соотношение между усилиями и перемещениями через матрицу жёсткости ребра:

$$\frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} N_2^* \\ -M_2 \end{bmatrix} = K_p(0) \begin{bmatrix} -W_p \\ -b\theta_p \end{bmatrix}_{\eta=0}, \quad (7)$$

В (7) N_2^* – приведённая поперечная сила, M_2 – изгибающий момент, θ_p – угол поворота ребра. При нулевом прогибе на линии контакта характеристическое уравнение

местной формы следует из условия равновесия изгибающих моментов в ребре и двух примыкающих участках обшивки. В обозначениях [2] оно записывается в виде

$$\left(k_{**} - 2c^2 \frac{h}{b} \tau_2 b_{12}\right)_{\eta=0,5} = 0. \quad (8)$$

Первое слагаемое в (8) определяется коэффициентом матрицы жёсткости ребра, а второе – коэффициентами решения изгибной задачи для обшивки. Множитель 2 учитывает два участка обшивки, примыкающих к ребру. Определения коэффициентов и преобразования, приводящие к (8), приведены в [2].

Численное решение характеристического уравнения

Для заданных геометрических параметров, числа полуволн и продольного напряжения постоянные интегрирования определяются из систем линейных алгебраических уравнений. При вычислении коэффициентов жёсткости на линии контакта задаются нулевой прогиб и единичная производная прогиба. Для ребра дополнительно выполняются условия свободной кромки. По найденным постоянным вычисляются изгибающие моменты, которые с учётом принятого правила знаков подставляются в условие равновесия (8).

Численное решение выполнено для целых значений m от 1 до 16. Поиск корней проводится по положительному параметру, равному отношению сжимающего напряжения к модулю упругости. Интервал от 10^{-7} до 0,02 разбивается на 800 точек с логарифмическим распределением. На участках изменения знака характеристической функции корни уточняются методом деления отрезка пополам; при резком изменении функции вводятся дополнительные точки. Для каждого m из найденных положительных корней, удовлетворяющих проверке невязки, выбирается наименьший. Затем проводится сравнение результатов для различных m .

При вырождении вспомогательных краевых задач в характеристической функции могут возникать полюсы. Поэтому изменение знака функции проверяется совместно с уменьшением невязки относительно значений на концах исходного интервала. Значения, не удовлетворяющие этому условию, исключаются из последующего сравнения. Для варианта 3 при $m = 1$ корень в заданном интервале не найден; соответствующая точка в сопоставление критических напряжений не включена.

Влияние дискретизации интервала поиска проверено повторным расчётом при числах полуволн, соответствующих найденным минимумам. Увеличение числа исходных точек с 800 до 1600 привело к относительному изменению каждого из четырёх минимальных корней менее чем на 10^{-12} . Этот результат характеризует чувствительность найденных корней к указанному изменению параметров численного поиска.

Результаты расчёта

Рассмотрены четыре геометрических варианта, приведённые в [5, табл. 3.1]. Коэффициент Пуассона во всех расчётах принят равным 0,3. Геометрические параметры представлены в табл. 1.

Таблица 1

Геометрические параметры расчётных вариантов

Вариант	δ/b	t_1/b_1	ω	b/L
1	0,0088	0,40	0,455	0,25
2	0,0100	0,05	0,200	0,15
3	0,0400	0,05	0,200	0,20
4	0,0280	0,05	0,250	0,20

Источник геометрических параметров: [5, табл. 3.1].

В табл. 2 приведены минимальные критические напряжения в безразмерном виде $10^3 \sigma/E$, принятом в [5]. Относительное расхождение определяется как модуль разности вычисленного значения и значения из [5], отнесённый к последнему и выраженный в

процентах. Для всех четырёх вариантов получено совпадение чисел полуоволн, соответствующих минимуму в исследованном диапазоне.

Таблица 2

Сопоставление минимальных критических напряжений

Вариант	m по [5]	m расчёт	$10^3\sigma/E$ по [5]	$10^3\sigma/E$ расчёт	Расхождение, %
1	6	6	0,4768	0,4750	0,37
2	7	7	0,3945	0,3915	0,77
3	7	7	2,7724	2,7753	0,11
4	5	5	2,3311	2,3523	0,91

Контрольные данные: [5, табл. 3.2], ребро моделируется пластиной. Расчёт выполнен с использованием вычислительного комплекса, написанного на языке Python.

Зависимости критических напряжений от числа продольных полуоволн в окрестности найденных минимумов представлены на рис. 5. Варианты 1 и 2, а также 3 и 4 объединены попарно с учётом диапазона значений напряжений. Линии соединяют дискретные расчётные точки.

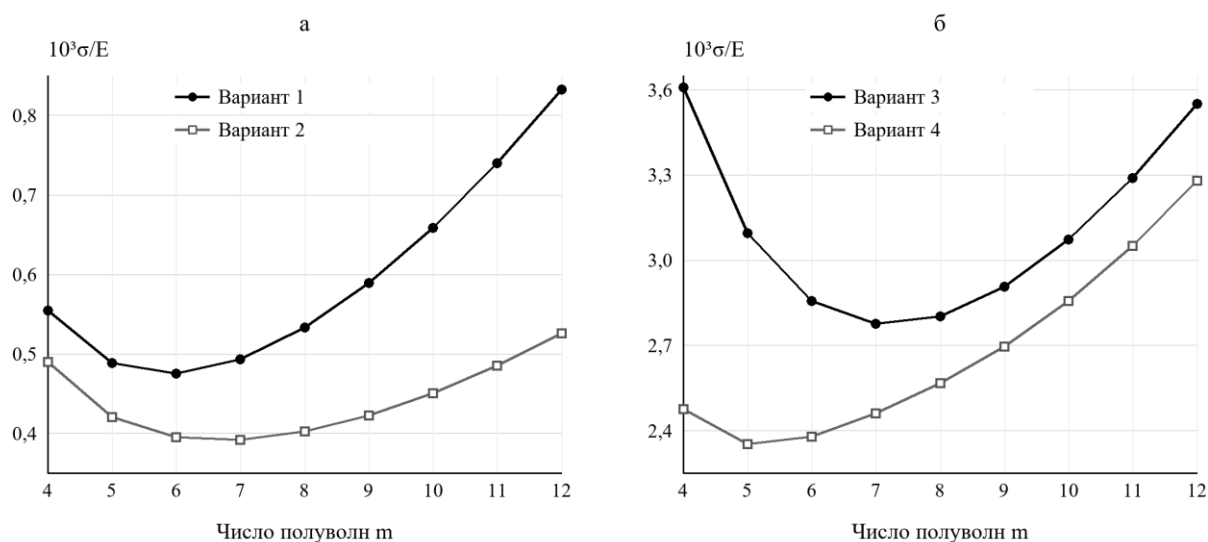


Рис. 5. Зависимость критических напряжений местного выпучивания от числа продольных полуоволн: а – варианты 1 и 2; б – варианты 3 и 4.

Минимальные значения $10^3\sigma/E$ для вариантов 1–4 составили соответственно 0,4750; 0,3915; 2,7753 и 2,3523. Наибольшее относительное расхождение с [5] получено для варианта 4 и равно 0,91 %, наименьшее – для варианта 3 и равно 0,11 %.

В табл. 3 приведены два наименьших критических напряжения из набора минимальных корней, найденных при различных m. Относительное превышение рассчитано по отношению к минимальному напряжению.

Таблица 3

Сопоставление двух наименьших критических напряжений при различных числах полуоволн

Вариант	m при минимуме	m для следующего значения	$10^3\sigma/E$ для следующего значения	Превышение минимума, %
1	6	5	0,4881	2,76
2	7	6	0,3948	0,85
3	7	8	2,8015	0,94
4	5	6	2,3774	1,07

Источник: расчёт с использованием вычислительного комплекса, написанного на языке Python; m от 1 до 16.

Для вариантов 2–4 относительное превышение минимального напряжения составляет 0,85–1,07 %, для варианта 1 – 2,76 %. Близкие значения получены при соседних числах полувольт: 7 и 6 для варианта 2, 7 и 8 для варианта 3, 5 и 6 для варианта 4. Таким образом, близость критических напряжений при различных m установлена для конкретных геометрических параметров табл. 1.

Для варианта 4 дополнительно выполнено сопоставление при $m = 9$, для которого в [5] приведено значение $10^3 \sigma / E = 2,6864$. В настоящем расчёте получено 2,6953; относительное расхождение составляет 0,33 %. Это напряжение на 14,58 % превышает минимальное значение, найденное для данного варианта при $m = 5$.

Обсуждение результатов

Решение линейной задачи местной устойчивости включает определение корней характеристического уравнения при фиксированном m и минимизацию полученных критических напряжений по числу полувольт. Для рассмотренных вариантов минимум достигается при различных m , что требует учёта продольной формы при сопоставлении расчётных схем. Данные табл. 3 показывают, что близким значениям критического напряжения могут соответствовать разные числа полувольт.

Числа полувольт, соответствующие минимальным напряжениям, совпадают с результатами [5] для всех четырёх вариантов. Относительные расхождения напряжений находятся в пределах 0,11–0,91 %. Изменение плотности исходной сетки поиска оказывает существенно меньшее влияние на найденные корни. Следовательно, приведённая оценка чувствительности к дискретизации интервала поиска не характеризует расхождение с данными аналитического расчёта [5].

Результаты относятся к линейной упругой постановке для геометрически идеальной панели и к исследованному диапазону чисел полувольт. Сопоставление выполнено с данными аналитического расчёта [5]. Влияние начальных несовершенств, пластических деформаций и взаимодействия форм в послекритической области требует отдельного исследования.

Заключение

На основе аналитических решений изгибных задач для обшивки и ребра, моделируемого пластиной, выполнен расчёт местной устойчивости регулярно подкреплённой пластины при продольном сжатии. Критические напряжения определены из условия равновесия изгибающих моментов на линии контакта. Численная процедура включает проверку невязки характеристического уравнения и сопоставление решений при различных числах продольных полувольт.

Для четырёх рассмотренных геометрических вариантов при m от 1 до 16 получены критические числа полувольт 6, 7, 7 и 5, совпадающие с результатами [5]. Относительные расхождения критических напряжений составляют 0,11–0,91 %. При увеличении числа точек исходной сетки с 800 до 1600 относительное изменение найденных минимальных корней не превышает 10^{-12} .

Для трёх вариантов два наименьших критических напряжения, полученные при различных числах полувольт, различаются на 0,85–1,07 % от минимального значения. Сопоставление этих значений уточняет выбор критической местной формы в исследованном диапазоне m и дополняет сравнение минимальных напряжений с результатами [5].

Список литературы:

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.

2. Грудцына И. Е. Устойчивость тонких подкрепленных пластин с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания: дис. ... канд. техн. наук: 2.1.9. Москва: Российский университет транспорта, 2023.
3. Маневич А. И. Взаимодействие форм потери устойчивости сжатой подкрепленной панели // Строительная механика и расчет сооружений. 1981. № 5. С. 24–29.
4. Маневич А. И. К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // Прикладная математика и механика. 1982. № 2. С. 337–345.
5. Маневич А. И. Нелинейная теория устойчивости подкрепленных пластин и оболочек с учетом взаимодействия форм выпучивания: дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.04. Днепропетровск, 1986. 423 с.

References:

1. Volmir A. S. Stability of deformable systems. Moscow: Nauka; 1967. 984 p. (In Russ.)
2. Grudtsyna I. E. Stability of thin stiffened plates considering the interaction of buckling eigenmodes. Candidate of Technical Sciences dissertation. Moscow: Russian University of Transport; 2023. (In Russ.)
3. Manevich A. I. Interaction of buckling modes of a compressed stiffened panel. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 1981;(5):24–29. (In Russ.)
4. Manevich A. I. On the theory of coupled buckling of stiffened thin-walled structures. Prikladnaya Matematika i Mekhanika. 1982;(2):337–345. (In Russ.)
5. Manevich A. I. Nonlinear stability theory of stiffened plates and shells considering buckling mode interaction. Doctor of Technical Sciences dissertation. Dnepropetrovsk; 1986. 423 p. (In Russ.)