

УДК 531.011

СОПРОТИВЛЕНИЕ КАЧЕНИЮ И СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ**Тарсис Екатерина Юрьевна,**канд. техн. наук, доцент кафедры математики и физики
Сибирский государственный университет инженерии и биотехнологий
ytarsis@mail.ru**Аннотация**

В работе показана идентичность решений задач о сопротивлении качению и статической устойчивости тел. Предложена более обоснованная терминология.

Ключевые слова: трение скольжения, сопротивление качению, устойчивость при опрокидывании или статическая устойчивость, идентичность решений задач анализа сопротивления качению и статической устойчивости.

ROLLING RESISTENCE AND STATIC STABILITY**Tarsis Ekaterina Yurievna,**Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and
Physics
Siberian State University of Engineering and Biotechnology**ABSTRACT**

The paper demonstrates the identity of solutions to problems of rolling resistance and static stability of bodies. A more substantiated terminology is proposed.

Keywords: sliding friction, rolling resistance, rollover stability or static stability, identity of solutions to rolling resistance and static stability analysis problems.

Введение

Трение скольжения и сопротивление качению в теоретической механике рассматриваются вначале в разделе статика, где обсуждаются условия равновесия тел при наличии указанных факторов. Условия равновесия тел, расположенных на негладких плоскостях, при этом дополняются ограничениями, выполнение которых не позволяет телам скользить по плоскости или опрокидываться. Первое ограничение относится к трению скольжения, а второе – к так называемой статической устойчивости. Для колес (катков) вводится понятие сопротивление качения. При объяснении природы второго ограничения, применительно к колесам, используются термины «трение качения», «момент трения качения» и «коэффициент трения качения».

В данной работе показано, что понятие сопротивления качению идентично по своей сути и форме понятию сопротивления опрокидыванию или статической устойчивости тел. Рассмотрены способы решений и приведены примеры, которые ориентированы на задачи движения колес наземных транспортных средств, включающих ведущие, ведомые, ведомо ведущие колеса. Предложена, по мнению автора, более обоснованная терминология.

1. Статическая устойчивость. Рассмотрим задачу (см. рис. 1 а). На горизонтальной негладкой плоскости расположено тело, являющееся, например, однородным параллелепипедом с размерами срединного сечения, лежащего в плоскости симметрии xOy , l и h . Коэффициент трения скольжения равен f . На тело действует плоская система внешних сил, которую можно привести к центру C . Эта система содержит алгебраический главный момент M^a и две составляющих главного вектора \vec{P}_1^a, \vec{P}_2^a , которые расположены в плоскости симметрии xOy . Сразу заметим, что вектор \vec{P}_1^a всегда направлен к плоскости, поскольку в противном случае поставленная задача не имеет смысла: трение скольжения и сопротивление качению возникают только при прижатии тела к плоскости. Направления момента M^a и второй составляющей главного вектора внешних сил \vec{P}_2^a соответствуют задаче о ведомо ведущем колесе. Для ведущего колеса полагаем $P_2^a = 0$, а для ведомого колеса $M^a = 0$.

Реакциями плоскости будут: сила нормального давления \vec{N} , приложенная в некоторой точке D и перпендикулярная плоскости, и сила трения скольжения \vec{F} . Предполагается, для общности, что имеется так называемый прицеп, который транспортируется телом. Сила сопротивления прицепа равна \vec{Q} . Требуется определить: 1) реакции плоскости; 2) значения величин, определяющих находится ли тело в состоянии равновесия, или совершает движение. Рассмотрим первый способ решения задачи.

Запишем уравнения равновесия тела:

$$\begin{aligned} \sum P_{kx} &= 0; P_2^a - Q + F = 0; \\ \sum P_{ky} &= 0; -P_1^a + N = 0; \\ \sum M_O(\vec{P}_k) &= 0; -M^a - P_2^a \frac{h}{2} + Q \frac{h}{2} + N\Delta = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

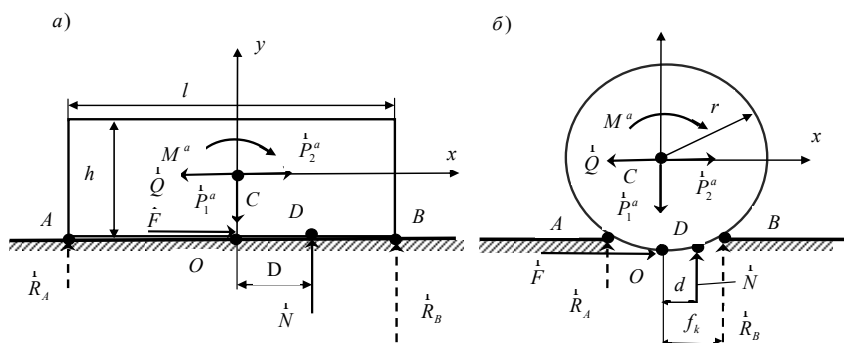


Рис.1

В отличие от тех задач статики, в которых связи, наложенные на рассматриваемое тело, являются удерживающими, в нашей задаче для того, чтобы тело находилось в состоянии равновесия, существуют два ограничения. Первое касается силы трения скольжения, которое определяется законом Кулона:

$$|F| \leq fN. \quad (2)$$

Второе ограничение касается третьего уравнения равновесия. Линия действия нормальной реакции плоскости (как неударживающей связи) должна проходить через точку, принадлежащую и телу, и плоскости. Отсюда следует:

$$\Delta = \frac{M^a + P_2^a \frac{h}{2} - Q \frac{h}{2}}{N} \leq \frac{l}{2}. \quad (3)$$

Нарушение первого ограничения (2) вызовет скольжение тела вдоль плоскости. Нарушение второго ограничения (3) приведет к тому, что тело начнет вращаться вокруг ребра, проходящего через точку B и перпендикулярного плоскости xOy . Отметим, что эта точка является крайней опорной точкой срединной плоскости тела, лежащей в плоскости xOy . Это явление можно назвать потерей статической устойчивости тела. В зависимости от того, какое из приведенных условий нарушено, тело либо начнет скользить вдоль плоскости, либо потеряет статическую устойчивость, либо оба случая произойдут одновременно.

Из первых двух уравнений системы (1) определяются величины силы трения F и нормального давления N , а из третьего величина Δ :

$$F = Q - P_2^a; N = P_1^a; \Delta = \frac{M^a + P_2^a \frac{h}{2} - Q \frac{h}{2}}{N} = \frac{M^a + P_2^a \frac{h}{2} - Q \frac{h}{2}}{P_1^a}$$

Далее, используя ограничения (2) и (3), можно сделать выводы относительно скольжения тела и его статической устойчивости. Так, если нарушается условие (2), тело начинает скользить вдоль плоскости, если нарушается условие (3), тело теряет статическую устойчивость (опрокидывается), а если нарушаются оба условия, то происходит и скольжение и потеря статической устойчивости.

Можно предложить и другой способ решения. Заменим нормальное давление двумя параллельными силами \vec{R}_A, \vec{R}_B ; $\vec{N} = \vec{R}_A + \vec{R}_B$, приложенными в крайних опорных точках тела. Тогда уравнения равновесия тела примут вид:

$$\begin{aligned} \sum P_{kx} &= 0; P_2^a + F - Q = 0; \\ \sum P_{ky} &= 0; -P_1^a + R_A + R_B = 0; -P_1^a + N = 0; \\ \sum M_B(\vec{P}_k) &= 0; -M^a - P_2^a \frac{h}{2} + Q \frac{h}{2} + P_1^a \frac{l}{2} - R_A l = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

К этой системе следует добавить ограничение (2). Что касается ограничения (3), то ему эквивалентен тот факт, что для неударживающей связи, которой является плоскость, значения величин опорных реакций не могут принимать отрицательных значений, а их сумма должна быть равна величине нормального давления.

Из первых двух уравнений системы (4) определяются величины силы трения F и нормального давления N , а из третьего величина R_A :

$$F = Q - P_2^a; N = R_A + R_B = N = P_1^a; R_A = \frac{P_1^a \frac{l}{2} - M^a - P_2^a \frac{h}{2} + Q \frac{h}{2}}{l}$$

Наличие или отсутствие скольжения определяется на основе условия (2). В рассматриваемом случае должны выполняться неравенства

$R_A \geq 0; R_B = P_1^a - R_A = N - R_A \geq 0$. Случай $R_A = 0$ является предельным и означает положение неустойчивого равновесия. Отрицательное значение $R_A < 0$ означает потерю статической устойчивости.

2. Сопротивление качению. Перейдем к задаче о качении (см. рис. 1 б). Вместо тела объектом является колесо, к которому приложена приведенная к его центру плоская система внешних сил. В отличие от первой задачи изменяется характер взаимодействия колеса с плоскостью, который приводится, например, в [1]. Взаимодействие объясняется деформированием контактной поверхности и смещением нормальной реакции в сторону предполагаемого качения тела. Второй составляющей равнодействующей реакции плоскости является сила трения скольжения. Далее, цитируем [1]: «Определение значений и направлений распределенных сил представляет сложную задачу механики деформируемого твердого тела. В инженерных расчетах нас интересует момент сопротивления качению (рис. 10.2, б). Схематизируя явление, будем рассматривать качение по недеформируемой поверхности, а полную реакцию (см. рис. 10.2 а) представлять в виде двух составляющих, приложенных в точке В, смещенной от точки А в сторону возможного качения на величину δ (см. рис. 10.2 в)». Далее записываются условия равновесия, на основании решения которых делается вывод, что при достижении предельного значения смещения силы нормального давления, тело начинает катиться. Это максимальное смещение авторы называют коэффициентом трения качения. Произведение коэффициента трения качения на нормальное давление авторы называют моментом сопротивления качению или моментом трения качения. Коэффициент трения качения определяется опытным путем.

Аналогичный подход к сопротивлению качению приводится во многих учебных пособиях по теоретической механике [2, 3, 4]. Но ни в одном (известном нам) не объясняется применение термина «трение» по отношению к качению. Термин трение скольжения достаточно понятен. Так, при скольжении одного тела по поверхности другого наблюдается относительное смещение области контакта движущегося тела по поверхности «неподвижного» тела. Другими словами, области контакта тел при скольжении не совпадают. Если же этого не происходит, то величина усилия в направлении такого относительного перемещения тел недостаточна для преодоления силы сопротивления, которая и называется силой трения скольжения. В случае качения колеса по неподвижной поверхности области контакта совпадают. Смещается сама деформирующаяся область. Сила трения скольжения при его наличии совершает работу только тогда, когда сила трения скольжения больше предельной величины. Момент сопротивления качению при его наличии (в том числе и при качении со скольжением) совершает работу всегда, независимо от его величины. Определение малых упругих деформаций при установлении границ опорной поверхности при решении задачи сопротивления качению является плоской контактной задачей линейной теории упругости [5], где не используется понятие трение. Стоит обсудить еще один термин – «трение второго рода». Этот термин употребляют, на наш взгляд, для того, чтобы показать отличие сопротивления качению от сопротивления скольжению, имея в виду, что первое значительно меньше.

Таким образом, понятие трения качения и применяемая терминология введены, на наш взгляд, не совсем удачно. Так, в [1] сказано: «Это сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого, условно называют трением качения». Подчеркнем: «условно». Очевидно, понятие трения качения связано с историей вопроса и традициями. По мнению автора, во избежание неясностей в изложении материала учебных пособий по курсу теоретической механики и других курсов, посвященных инженерным вопросам, можно было бы ограничиться следующей терминологией в описании задачи

сопротивления качению. Предлагается использовать следующие определения: «сопротивление качению», «момент сопротивления качению» и «коэффициент сопротивления качению».

Вернемся к нашей задаче. В задаче о статической устойчивости сделаем

$$\frac{h}{2} = r; \Delta = \delta; \frac{l}{2} = f_k$$

следующие замены: $\frac{h}{2} = r; \Delta = \delta; \frac{l}{2} = f_k$. При заменах мы пренебрегли величиной глубины деформированной поверхности, что оправдано ввиду малости деформаций по сравнению с размерами колеса и считаем, что центр колеса расположен симметрично по отношению к крайним опорным точкам деформированной поверхности. Теперь, пользуясь приведенными для анализа статической устойчивости и наличия или отсутствия скольжения способами решений, можно ответить на все вопросы, касающиеся скольжения и качения. Таким образом, задача о качении полностью идентична задаче о статической устойчивости.

3. Примеры и их анализ. Настоящая работа посвящена теме качения и условиям его наступления. Подобные задачи актуальны при рассмотрении равновесия и движения колес наземных транспортных средств. Поэтому примеры, приведенные в работе, относятся к транспортному колесу при различных условиях его нагрузки. Основные исходные данные в принятых обозначениях:

$P_1^a = 4000 \text{ Н}; r = 0.5 \text{ м}; f = 0.2; f_k = 0.005 \text{ м}$. Для всех задач

предельное значение силы трения скольжения равно: $F_{\max} = fP_1^a = 800 \text{ Н}$.

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

Вариант	$P_2^a, \text{Н}$	$M^a, \text{Нм}$	$Q, \text{Н}$	$F, \text{Н}$	$R_A, \text{Н}$	$R_B, \text{Н}$	$\delta \cdot 10^{-2}, \text{м}$
1	0	20	0	0	0	4000	0.5
2	0	420	800	800	0	4000	0.5
3	0	420	795	795	-250	4250	0.5625
4	40	0	0	-40	0	4000	0.5
5	41	0	0	-41	-50	4050	0.5125
6	30	5	0	-30	0	4000	0.5
7	30	5.2	0	-30	-20	4020	0.505

Проведем анализ полученных результатов.

Вариант 1. Ведущее колесо без прицепа. Этот вариант соответствует предельному положению равновесия. Вращающий момент, действующий на колесо равен

максимальному моменту сопротивления качению: $M^a = f_k N = 0.005 \cdot 4000 = 20 \text{ Нм}$.

Увеличение момента приведет к качению колеса, о чем и свидетельствуют критерии: $\delta = f_k, R_A = 0, R_B = N$.

Вариант 2. Ведущее колесо с прицепом. Сила сопротивления прицепа равна максимальному значению силы трения скольжения $Q = fP_1^a = 800 \text{ Н}$, а вращающий момент

$M^a = (fr + f_k)N = 420 \text{ Нм}$. Значение вращающего момента соответствует приведенному в

[1] значению максимального момента, после увеличения которого, начнется буксование колеса. Результат расчета: $\delta = f_k, R_a = 0, R_B = N$. Читатель обратит внимание на полное совпадение результатов расчетов обоих вариантов. Однако, между этими вариантами есть существенное различие, на котором мы и остановимся более подробно. Результаты свидетельствуют о том, что в обоих случаях мы имеем состояние предельного равновесия, а при увеличении вращающего момента колесо будет совершать движение. Однако, виды движений существенно отличаются. Так, в первом варианте это будет плоскопараллельное движение колеса, при котором будет совершаться качение без скольжения. Во втором варианте следует обратить внимание на то, что центр колеса останется неподвижным, и колесо будет вращаться при увеличении вращающего момента вокруг неподвижной оси. Именно это и есть буксование, а не качение со скольжением. Следует также обратить внимание на то, что в первом варианте сила трения скольжения равна нулю, а во втором – максимальна. Таким образом, во втором варианте нарушается условие (2) а не (3) т.е. происходит скольжение деформированной поверхности колеса относительно деформированной поверхности плоскости. Следует заметить, что при этом колесо не выполняет изначально функцию транспортирования прицепа. В заключение рассмотрения первых двух вариантов можно утверждать, что движение ведущего колеса с выполнением транспортирующей функции возможно только тогда, когда сила сопротивления прицепа меньше предельного значения силы трения скольжения.

Вариант 3. Ведущее колесо с прицепом. Сила сопротивления прицепа меньше максимального значения силы трения скольжения $Q = 795 \text{ Н}$, а вращающий момент $M^a = (f_r + f_k)N = 420 \text{ Нм}$. Результаты свидетельствуют, что в этом случае колесо начнет совершать качение без скольжения.

Вариант 4. Ведомое колесо. Заметим, что наличие или отсутствие прицепа не имеет значения, поскольку это можно учесть при задании значения силы P_2 . Предельное состояние равновесия наступит тогда, когда момент силы тяги относительно точки контакта колеса с плоскостью будет равен: $M_O(\vec{P}_2) = f_k N; 40 \cdot 0.5 = 0.005 \cdot 4000$. Вариант 4 иллюстрирует именно этот случай.

Вариант 5. Ведомое колесо. При увеличении тягового усилия по отношению к варианту 4 колесо будет совершать качение без скольжения.

Вариант 6. Ведомо ведущее колесо. Здесь наряду с вращающим моментом есть еще и сила тяги. Наличие или отсутствие прицепа, как и для ведомого колеса не имеет значения. Для получения состояния предельного равновесия необходимо, чтобы выполнялось условие: $M^a + M_O(\vec{P}_2) = f_k N$. Это и отражено в данном варианте $5 + 30 \cdot 0.5 = 0.005 \cdot 4000$.

Вариант 7. Ведомо ведущее колесо. Этот вариант показывает, что увеличение по сравнению с вариантом 6, например, вращающего момента приводит к качению без скольжения.

В заключение отметим следующее. В приведенных примерах рассмотрены случаи, когда нарушение равновесия происходит тому, что нарушение ограничений по скольжению и потере статической устойчивости приводит к тому, что тело начинает движение. Известно, что при движении колес транспортных средств могут наблюдаться следующие случаи: качение без скольжения, поступательное движение и качение со скольжением. Но после начала движения в результате нарушения одного из приведенных ограничений исследование дальнейшего движения не может проводиться в рамках статики.

Для такого исследования должны привлекаться методы динамики, что выходит за рамки настоящей статьи.

Выводы

1. Задача о сопротивлении качению является идентичной, по своей сути и форме, задаче о статической устойчивости.

2. На наш взгляд, более правильно следует вместо термина «трение качения» использовать термин «сопротивление качению», вместо термина «момент трения качения» – «момент сопротивления качению» и вместо «коэффициента трения качения» – «коэффициент сопротивления качению».

Список литературы:

1. Курс теоретической механики. Под редакцией К.С. Колесникова. 5- издание, исправленное. Москва. Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2017. 580 с.
2. Н.Н. Никитин. Курс теоретической механики. Издание пятое. Переработанное и дополненное. Москва «Высшая школа». 1990. 607 с.
3. Машиностроение. Энциклопедия в сорока томах. Том 1-2. Теоретическая механика термодинамика теплообмен. Москва «Машиностроение», 1999, 600 с.
4. Теоретическая механика. Статика: учебное пособие / С.В. Слепова, Н. Р. Саврасова.– Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2024.–196 с.: ил., табл.
5. Л.М. Савельев. Теория упругости: учебное пособие /Л.М. Савельев. – Самара: Самарский университет, 2021.–339 с.

References:

1. Course of theoretical mechanics. Edited by K.S. Kolesnikova. 5th edition, revised. Moscow. Publishing house of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 2017. 580 p.
2. N.N. Nikitin. Course of theoretical mechanics. 5th edition. Revised and expanded. Moscow «Higher School». 1990. 607 p.
3. Mechanical engineering. Encyclopedia in forty volumes. Volume 1-2. Theoretical mechanics thermodynamics heat transfer. Moscow «Mechanical Engineering», 1999, 600 p.
4. Slepova S.V. Savrasova N.R. Theoretical Mechanics. Statics: Study Guide. Moscow; Vologda: Infra-Inzheneriya, 2024, 196 p.
5. Savelyev L.M. 2021 Theory of Elasticity: Study Guide. Samara: Samare Univercity, 339 p.