

УДК 514.18

**ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С  
ПОВЕРХНОСТЬЮ ГЛОБОИДА И ПАРАБОЛОИДА****Зуев Алексей Михайлович,**

старший преподаватель кафедры «Инженерная графика»,  
Калужский Филиал ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»  
e-mail:zuevam@bmstu.ru

**Шауки Шауки Хани,**

студент группы МК1-41Б,  
Калужский Филиал ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»  
email:shaukishkh@student.bmstu.ru

**Аннотация**

В работе проведён анализ построения среза глобоида и параболоида касательными плоскостями в контексте задач геометрического моделирования сложных поверхностей. Описан алгоритм построения срезов, основанный на методе замены плоскостей проекций, позволяющем перевести касательные плоскости в проецирующее положение с последующим определением точек пересечения с параллелями поверхности. Обосновывается оптимальность данного метода по сравнению с трудоёмким построением по параллелям без преобразования чертежа.

**Ключевые слова:** точка, плоскость, поверхность, касательная.**CONSTRUCTION OF INTERSECTION LINES OF A TANGENT PLANE WITH  
A GLOBOID SURFACE AND A PARABOLOID SURFACE****Zuev Alexey Mikhailovich,**

Senior Lecturer, Department of Engineering Graphics,  
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State  
Technical University» (Kaluga Branch)  
email:zuevam@bmstu.ru

**Shawky Shawky Hany,**

Student of group MK1-41B,  
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Bauman Moscow State  
Technical University» (Kaluga Branch)  
email:shaukishkh@student.bmstu.ru

## ABSTRACT

The paper presents an analysis of constructing a section of a globoid and paraboloid by tangent planes in the context of geometric modeling problems of complex surfaces. An algorithm for constructing the sections is described, based on the method of replacing projection planes, which allows transforming the tangent planes into a projecting position, followed by determining the intersection points with the parallels of the surface. The optimality of this method is substantiated in comparison with the labor-intensive construction using parallels without transformation of the drawing.

**Keywords:** point, plane, surface, tangent.

В начертательной геометрии касательная плоскость к поверхности задаётся двумя пересекающимися прямыми: одна из которых есть касательная к одной кривой, образующей данную поверхность, а вторая к другой кривой на данной поверхности.

В зависимости от образующей поверхности касание может быть: точечным, линейчатым и описывающим часть поверхности.

Разберём три указанных типа касания подробнее:

Точечное касание – тип касания, которое происходит только в одной точке. В качестве примера можно привести касание вершины конуса с плоскостью параллелепипеда (Рис 1).

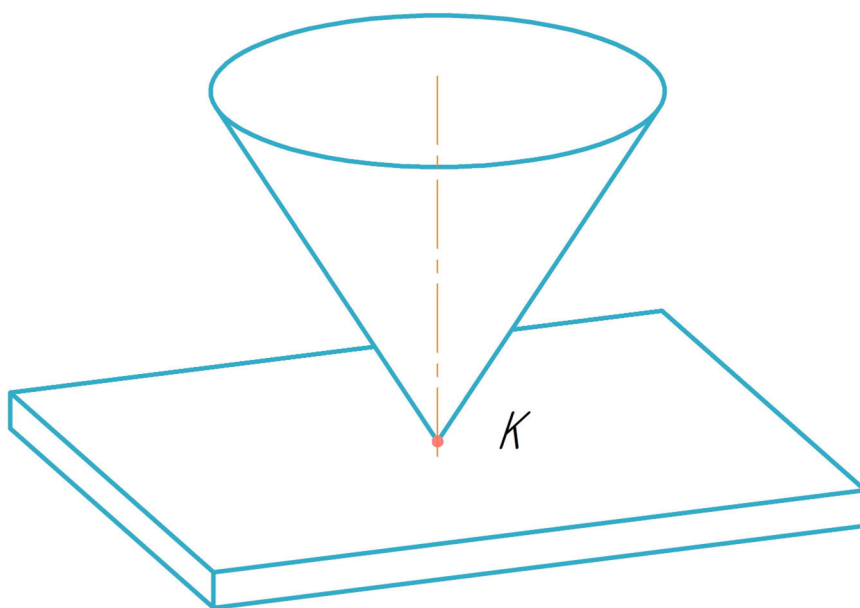


Рисунок 1: Точечное касание

вершины конуса с плоскостью параллелепипеда. [разработано авторами]

Где К – точка касания.

Линейчатое касание – тип касания, которое происходит по прямой линии. Например: касание образующей конуса с плоскостью (Рис 2).

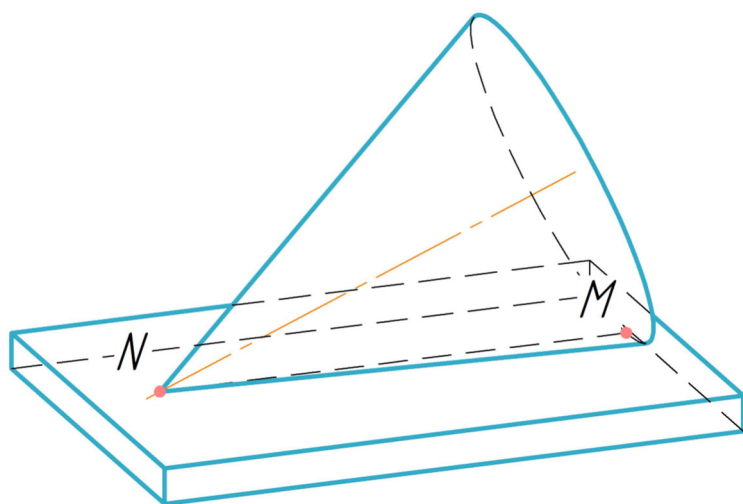


Рисунок 2: Линейчатое касание вершины конуса с плоскостью параллелепипеда. [разработано авторами]

Где  $MM$  – прямая касания.

Касание, описывающее часть поверхности – это касание по кривой линии, которая принадлежит поверхности. Например: внутреннее касание цилиндра со сферой одинакового диаметра.

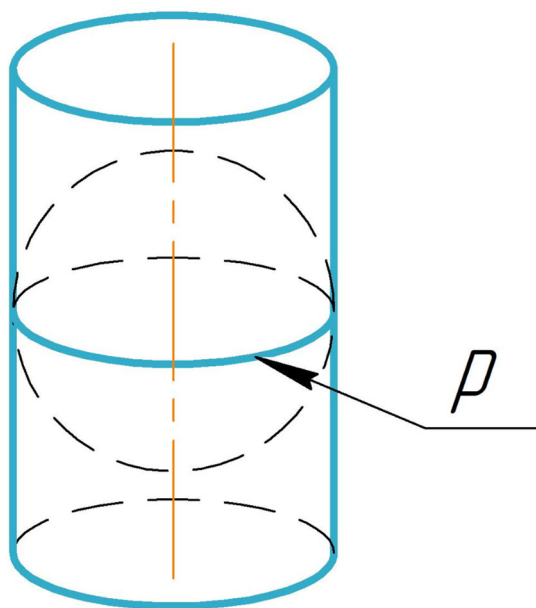


Рисунок 3: Касание сферы с цилиндром [разработано авторами]

Где  $p$  – линия касания с цилиндром.

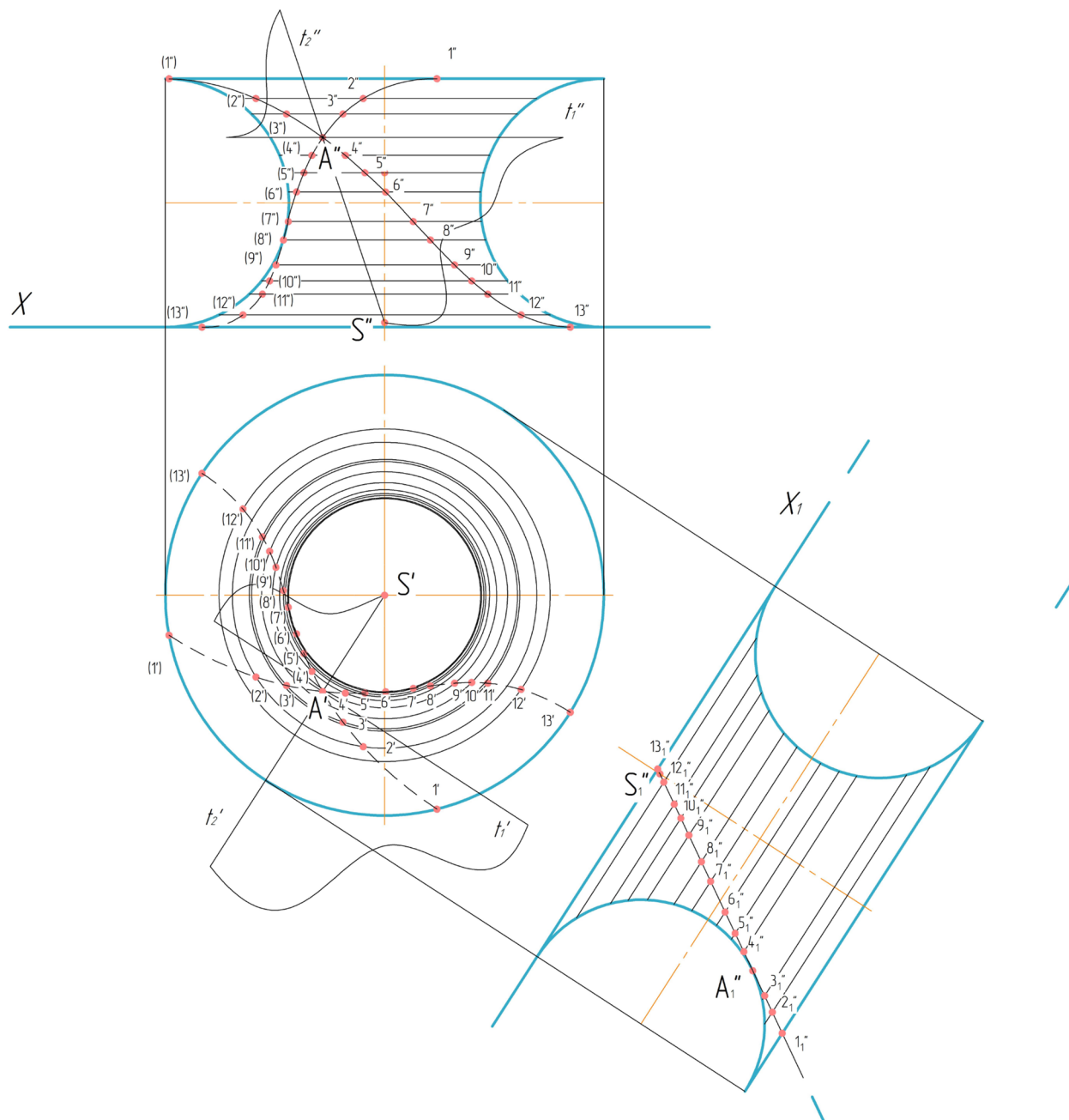
Опираясь на статью [4] известен метод построения пересечения поверхностей, поверхности с плоскостями уровня. Однако процесс построения линий среза касательных плоскостей с такими телами вращения как глобоид и параболоид не рассмотрен. Данная статья способствует визуализацию построения такой модели, при этом делая акцент на практические применения для линии среза.

При решении производственных задач очень часто необходимо построить данную линию среза (пересечения).

Рассмотрим первый вид касания. В учебной литературе данное касание рассматривается частично, без построения линий пересечения с поверхностью.

Построение выполнено на примере глобоида (Рис 4.) Дано: поверхность глобоида ( $\beta$ ), точка  $A$  на данной поверхности и плоскость  $\alpha$  ( $t_1; t_2$ ), касательная к поверхности ( $\beta$ ) в точке  $A$ .

Глобоид – это поверхность вращения, образованная вращением дуги окружности вокруг оси, которая в общем случае не совпадает с плоскостью этой окружности и не проходит через её центр [1].



Рисунок

4. Построение линии пересечения касательной плоскости  $\alpha$  с поверхностью глобоида.

[разработано авторами]

На первом этапе переводим плоскость  $\alpha$  в проецирующее положение. Осуществляем это заменой плоскостей проекций. Вводим новую ось  $X_1$  перпендикулярно  $t_1$ , т. к. она есть горизонталь. На новую плоскость проекций плоскость  $\alpha$  спроецируется в линию. Поверхность глобоида  $\beta$  не изменит своего положения т. к. она поверхность вращения. На поверхности глобоида проводим параллели  $\gamma_1 \dots \gamma_n$ . Данные параллели пересекаются в

точках 11" ...131". Определяем данные параллели на горизонтальной проекции. На плоскость  $\pi_1$  данные параллели проецируются в окружности соответствующего радиуса. Полученные точки 11" ...131" сносим на соответствующие окружности. Получаем горизонтальную проекции линии пересечения. Строим данные параллели на фронтальной плоскости проекций и сносим их на них соответствующие точки. Получаем фронтальную проекцию линии пересечения. Далее определяем видимость данных линий. На горизонтальной плоскости линия пересечения перекрывается наибольшей параллелью, поэтому она невидимая. Все точки находящиеся перед главным фронтальным меридианом на фронтальной проекции видимые, а точки за главным фронтальным меридианом – невидимые.

В качестве второго примера, рассмотрим построение линии среза касательной плоскости с поверхностью параболоида (Рис 5).

Параболоид – это поверхность вращения, полученная вращением параболы вокруг собственной оси симметрии.[2].

Данная линия среза строится аналогично линии среза касательной плоскости с поверхностью глобоида.

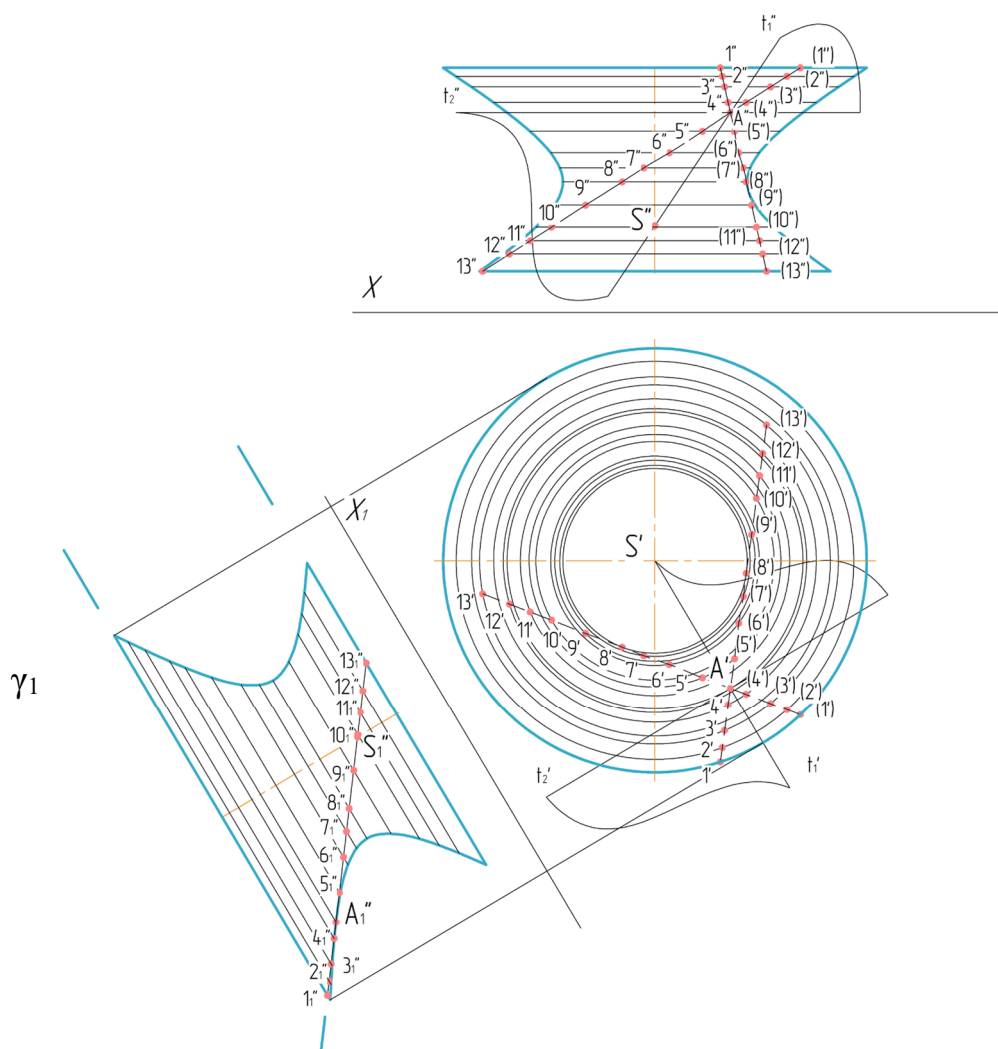


Рисунок 5: Построение

линии пересечения плоскости  $\beta$  с поверхностью параболоида. [разработано авторами]

Для построения линии среза можно использовать и параллели поверхности, но это очень трудоёмкий процесс. Поэтому способы преобразования чертежа, в частности замена плоскостей проекций наиболее оптимальный вариант для решения данной задачи.

Таким образом, применение метода замены плоскостей проекций позволяет эффективно и с меньшими трудовыми затратами построить линию пересечения касательной плоскости с поверхностью глобоида, что подтверждает целесообразность использования способов преобразования чертежа при решении подобных геометрических задач.

Такие построения имеют свое практическое применение, например в области машиностроения. В качестве примера, разберем глобоидную червячную передачу. Червячная передача, у которой делительная поверхность червяка образована вращением вокруг оси червяка вогнутого отрезка дуги делительной окружности парного червячного колеса, лежащей в плоскости его торцового сечения, а делительная поверхность червячного колеса – цилиндрическая называется глобоидной червячной передачей.[2]

Эскиз глобоидной червячной передачи изображён на рисунке 6.

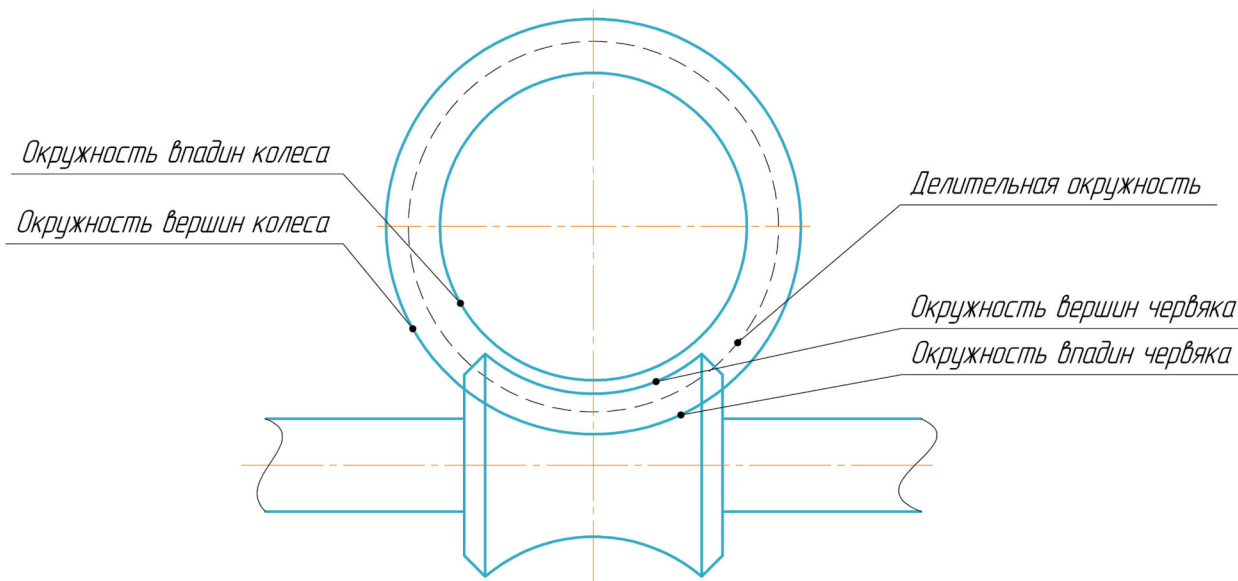


Рисунок 6: Эскиз глобоидной червячной передачи. [разработано авторами]

В червячной передаче, касательную плоскость можно представить как упрощённую модель касания одного зуба зубчатого колеса с поверхностью витка червяка. Иными словами: касательная плоскость в данном случае – мгновенное положение плоской грани зуба колеса, которая касается глобоида в некоторой точке А, а множество таких плоскостей – огибающая их линий среза, определяющая линию контакта и соответственно пятно контакта.

Важно отметить, что поверхность глобоида в данной червячной передаче – это математическая модель для расчёта линии контакта, а не точное изображение витка.

Фактическое пятно контакта будет состоять из зоны вокруг линии среза, близкой к эллипсу вытянутому или к прямоугольнику.

Для определения максимального давления и эпюру напряжений линия среза помогает тем, что она представляет собой геометрическое место возможных центров зон контакта.

Для определения давления в зонах контакта можно воспользоваться уравнениями Герца для эллиптических поверхностей [3]:

$$p_0 = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b}$$

Где  $p_0$  – максимальное давление в пятне контакта,  $a$  – большая полуось эллипса контакта,  $b$  – малая полуось эллипса контакта, при этом:

$$a = \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F}{4 \cdot E} \cdot \frac{1}{A+B}}; \quad b = \beta \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F}{4 \cdot E} \cdot \frac{1}{A+B}}$$

Где  $F$  – сила прижатия (Н),  $\alpha$  и  $\beta$  – табличные коэффициенты, зависящие от формы поверхностей,  $E$  – модуль упругости червяка (Па),  $A + B$  – суммарная кривизна.  $A$  – кривизна в поперечном направлении (перпендикулярно оси вала),  $B$  – кривизна в продольном направлении червяка (параллельно оси вала).

Если найти максимальное давление в каждом случае смещения центров эллипсов контакта, то можно построить эпюру максимальных давлений в контактах (от края до центра контакта), что необходимо для нахождения критического места контакта, а затем оценить выдержит ли передача заданную нагрузку.

И так, в работе решена задача геометрического моделирования линии пересечения касательной плоскости с поверхностями глобоида и параболоида. Применение метода замены плоскостей проекций позволило упростить построение линии среза. Установлено, что эта линия является траекторией движения центра эллиптической зоны контакта. С использованием формул Герца определены максимальное контактное давление и размеры эллипса контакта, что позволяет инженеру проводить расчёты на прочность передачи.

#### Список литературы:

1. Калашникова, Н. С. Начертательная геометрия: учебник / Н. С. Калашникова. – Москва: [издательство], [год]. – С. 12.
2. Киселев, Б. Р. Триботехника. Повышение эффективности работы червячной передачи: монография / Б. Р. Киселев. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – ISBN 978-5-8114-3199-1. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/213191>.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: пер. с англ. / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с. – ISBN 5-03-001065-3.
4. Харах, М.М. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ / М.М. Харах // Научный потенциал регионов на службу модернизации. – 2013. – № 3(6) Том 1. – С. 141-143. – ISSN 2306-5516. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/290786>.

#### References:

1. Kalashnikova, N. S. Descriptive Geometry: textbook / N. S. Kalashnikova. – Moscow: [publisher], [year]. – P. 12.
2. B. R. Kiselev, Tribotekhnika. Povyshenie effektivnosti raboty chervyachnoy peredachi [Tribology. Improving the efficiency of worm gear operation], 2nd ed. St. Petersburg, Russia: Lan, 2022. [Online]. Available: <https://e.lanbook.com/book/213191>
3. K. L. Johnson, Contact Mechanics. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1985, pp. 84-104.
4. M. M. Kharakh, "Geometric connections of descriptive geometry and engineering graphics," Scientific Potential of Regions for Modernization, vol. 1, no. 3(6), pp. 141-143, 2013. [Online]. Available: <https://e.lanbook.com/journal/issue/290786>.