

УДК 531.011

## К ДИНАМИКЕ ВЕДУЩЕГО КОЛЕСА

**Тарсис Екатерина Юрьевна,**

канд. техн. наук, доцент кафедры математики и физики  
Новосибирский Государственный Аграрный Университет  
ytarsis@mail.ru

### Аннотация

Рассмотрено решение задачи о ведущем колесе с учетом сил трения скольжения, сопротивления качению и силы сопротивления воздуха.

Решение задачи динамики ведущего колеса и прицепа позволило установить условия, при которых осуществляется основной рабочий вид движения ведущего колеса – качение без скольжения и допустимые значения вращающего момента для обеспечения этого вида движения. Показано, что максимальные значения вращающего момента в этом диапазоне больше значений, указанных авторами упомянутых в работе источников, полученных на основании статического подхода. На конкретных примерах дана оценка различия между этими моментами в пределах рабочего диапазона движения системы.

**Ключевые слова:** ведущее колесо, трение скольжения, сопротивление качению, сопротивление воздуха, максимальный вращающий момент, качение без скольжения, буксование, пробуксовка.

## TO DRIVING WHEEL DYNAMICS

**Ekaterina Yu.Tarsis**

Novosibirsk State Agrarian University

### ABSTRACT

The solution of the problem of the driving wheel is considered taking into account the sliding friction forces, rolling resistance and air resistance forces.

The solution of the problem of the dynamics of the drive wheel and the trailer made it possible to establish the conditions under which the main working type of movement of the drive wheel is carried out - rolling without slipping and the permissible values of the torque to ensure this type of movement. It is shown that the maximum values of the torque in this range are greater than the values indicated by the authors of the sources mentioned in the work, obtained on the basis of the static approach. Based on specific examples, an assessment is made of the difference between these moments within the operating range of the system's motion.

**Keywords:** driving wheel, sliding friction, rolling resistance, windage, maximum torque, rolling without sliding, slipping, frictional sliding.

### Введение

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой было показано различие между статическим и динамическим подходами к решению задачи о ведущем колесе. При определении максимального вращающего момента, обеспечивающего основной режим движения ведущего колеса с прицепом, при котором ведущее колесо катится без скольжения, было установлено, что этот момент может значительно превосходить значение, полученное на основании статического рассмотрения задачи. В [1] мы не рассматривали такой важный фактор, как сопротивление воздуха, которое, как правило, присутствует при движении системы в земных условиях. Нам представляется, что учет этого фактора приблизит решение задачи к реальности и позволит более корректно оценить различия между статическим и динамическим подходами. Автор не ставит своей целью рассмотрение конкретной практической задачи. Целью является исследование некоторых закономерностей, связанных с учетом сопротивления воздуха в рамках решаемой задачи. Поэтому объектом исследования является модельная задача, рассмотренная в предыдущей работе.

### 1. Формулировка задачи о ведущем колесе на основании уравнений динамики с учетом сопротивления воздуха

Рассмотрим задачу, приведенную в статье [1] (рис. 1), в котором прицеп представляет собой некоторое тело, которое может скользить по негладкой плоскости.

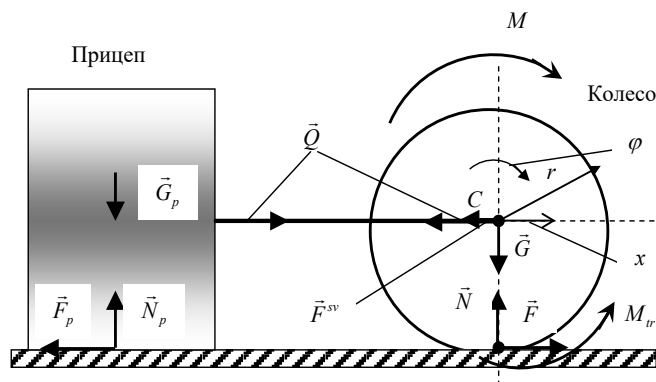


Рисунок 1. Расчетная модель ведущего колеса с прицепом

При решении задачи использованы обозначения:  $m, m_p$  – массы ведущего колеса и прицепа;  $\vec{G} = m\vec{g}, \vec{G}_p = m_p\vec{g}, \vec{N}, \vec{N}_p, \vec{F}, \vec{F}_p$  – силы тяжести, давления на плоскость и трения ведущего колеса и прицепа;  $\rho_c$  – радиус инерции колеса;  $M, M_{tr}$  – вращающий момент, приложенный к ведущему колесу, и момент сопротивления качению колеса;  $x, \varphi$  – обобщенные координаты системы;  $F^{sv} = \beta\dot{x}^2$  – сила сопротивления воздуха;  $\vec{Q}$  – сила сопротивления прицепа;  $\beta$  – коэффициент сопротивления воздуха.

Дифференциальные уравнения движения системы были в [1] были получены с помощью общего уравнения динамики при отсутствии сопротивления воздуха. При этом предполагалось, что при движении сила трения скольжения прицепа и момент сопротивления качению колеса равны их предельным значениям:

$$F_p = f_p m_p g; M_{tr} = \delta mg.$$

С учетом сопротивления воздуха пропорционального квадрату скорости дифференциальные уравнения движения системы будут иметь вид:

$$(m + m_p)\ddot{x} = F - f_p m_p g - \beta \dot{x}^2;$$

$$m\rho_c^2 \ddot{\phi} = M - \delta mg - Fr.$$

К полученной системе уравнений следует добавить условие, что сила трения ведущего колеса не должна превосходить предельного значения:

$$F \leq fmg.$$

Если положить, что ведущее колесо совершает качение без скольжения (прием, который применен при решении задачи о качении тяжелого цилиндра в [2]), то система имеет одну степень свободы:

$$\phi = \frac{x}{r}; \quad \ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}}{r},$$

И уравнения движения системы станут:

$$(m + m_p)\ddot{x} = F - f_p m_p g - \beta \dot{x}^2;$$

$$m\rho_c^2 \frac{\ddot{x}}{r} = M - \delta mg - Fr.$$

С помощью приведенных уравнений могут быть решены две основные задачи нашего исследования:

1) определить диапазон изменения максимального вращающего момента, при котором ведущее колесо катится без скольжения, и исследовать кинематические и силовые характеристики системы;

2) исследовать кинематические и силовые характеристики системы при заданном из указанного диапазона постоянном вращающем моменте.

**Решение первой задачи.** Поскольку для того, чтобы ведущее колесо катилось без скольжения необходимо, чтобы его сила трения не превосходило предельного значения, примем эту силу максимальной:  $F = fmg$ . Эти условия соответствуют максимальному значению вращающего момента:  $M = M_{\max}^d$ . Тогда уравнения движения примут вид:

$$(m + m_p)\ddot{x} = fmg - f_p m_p g - \beta \dot{x}^2;$$

$$m\rho_c^2 \frac{\ddot{x}}{r} = M_{\max}^d - \delta mg - fmgr.$$

Первое дифференциальное уравнение можно проинтегрировать, а из второго определить значения максимального вращающего момента  $M_{\max}^d$ :

$$M_{\max}^d = m\rho_c^2 \frac{\ddot{x}}{r} + \delta mg + fmgr.$$

Заметим, что в нашем случае эта величина является функцией времени, а сила трения скольжения постоянна на всем временном интервале. Одновременно определяются все кинематические характеристики движения системы и ее тел.

Отдельно можно также определить силу сопротивления прицепа  $Q$ . Для этого составим дифференциальное уравнение движения центра ведущего колеса:  $m\ddot{x} = fmg - Q - \beta \dot{x}^2$ , откуда:  $Q = fmg - m\ddot{x} - \beta \dot{x}^2$ .

**Решение второй задачи.** Рассмотрим случай, когда вращающий момент имеет постоянное значение, а сила трения скольжения колеса неизвестна. Решение ищется в рабочем диапазоне, где критерием является величина силы трения скольжения колеса, которая не может превосходить предельное значение. Уравнения будут иметь вид:

$$(m + m_p)\ddot{x} = F - f_p m_p g - \beta \dot{x}^2;$$

$$m\rho_c^2 \frac{\ddot{x}}{r} = M - \delta mg - Fr.$$

Из второго уравнения определяем силу трения скольжения колеса:

$$F = \frac{1}{r} \left( M - \delta mg - m\rho_c^2 \frac{\ddot{x}}{r} \right) = \frac{M}{r} - \frac{\delta mg}{r} - m\rho_c^2 \frac{\ddot{x}}{r^2}.$$

Подставляя это значение в первое уравнение, после несложных преобразований, получим:

$$(m + m_p + m \frac{\rho_c^2}{r^2})\ddot{x} + \beta \dot{x}^2 = \frac{M}{r} - \frac{\delta mg}{r} - f_p m_p g.$$

После интегрирования второго уравнения при заданном вращающем моменте определяем кинематические характеристики и силу трения скольжения ведущего колеса, которая в этом случае будет функцией времени. Критерием того, что ведущее колесо на всем участке катится без скольжения, является то, что сила трения скольжения колеса, не превосходит предельного значения. Здесь также можно определить силу сопротивления прицепа по формуле:  $Q = F - m\ddot{x} - \beta \dot{x}^2$ .

Далее заметим, что система может прийти в движение, если сила тяги в начальный момент времени при нулевых начальных условиях превосходит силу статического сопротивления прицепа и момент трения качения ведущего колеса. Отсюда следует, что величины силы трения скольжения колеса и вращающего момента  $M^*$  должны удовлетворять условиям:

$$F \geq f_p m_p g; M^* \geq \delta mg + f_p m_p gr.$$

Таким образом, величина вращающего момента, обеспечивающая качение ведущего колеса без скольжения, находится в интервале:

$$M^* \leq M \leq M_{\max}^d.$$

## 2. Расчетные исследования и их анализ

Приведем результаты конкретных расчетов для характеристик ведущего колеса и прицепа, приведенных в таблице 1.

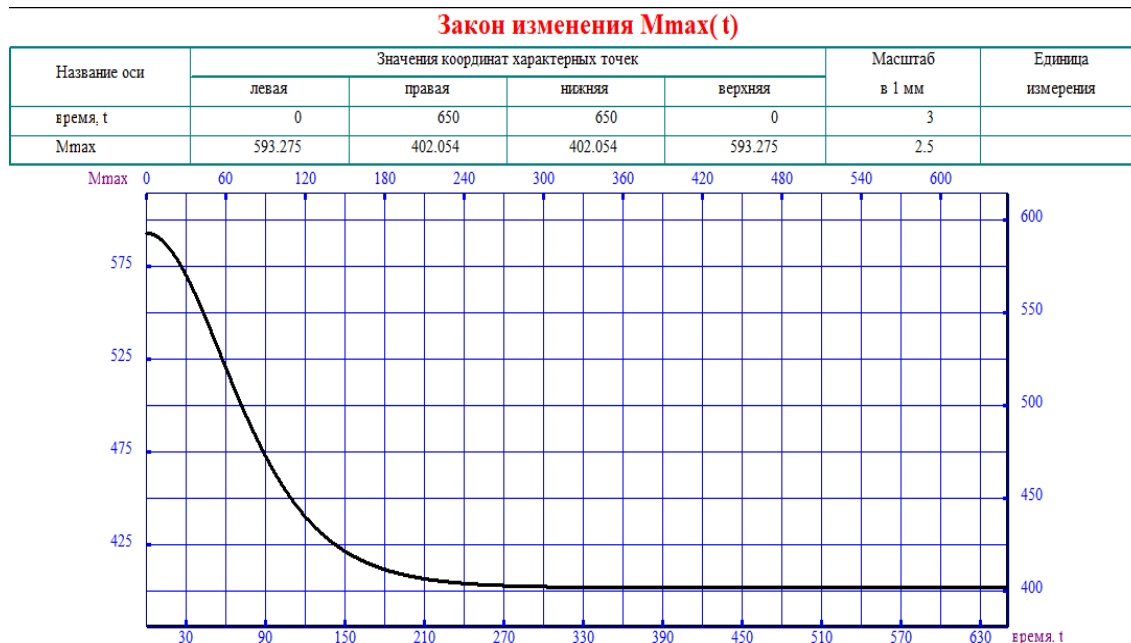
Таблица 1. Характеристики ведущего колеса и прицепа.

массы колеса и прицепа, $m, m_p, кг$ ;	радиус колеса, $r, м$	радиус инерции колеса, $\rho_c, м$	коэф. трения скольжения колеса, $f$	коэф. трения качения колеса, $\delta, м$	коэф. трения скольжения прицепа, $f_p$
500	0.4	0.4	0.2	0.002	0.005

1. Для выяснения характера зависимостей максимального вращающего момента и скорости системы от времени (задача 1) приведем их для коэффициента сопротивления  $\beta = 0.15$  (см. рис. 2).

Проанализируем полученный результат. Наибольшее значение момента (593.3 Нм) получено в начале интервала для скорости равной нулю, а наименьшее значение (402 Нм) при максимально возможной скорости совпадает со значением, приведенным в [3,4]. Точно такие же значения были приведены нами в [1]. В этом нет ничего удивительного, поскольку наибольшее значение характеризует различие между предельной силой трения скольжения колеса и требуемой статической силой, необходимой для приведения прицепа в движение.

а)



б)

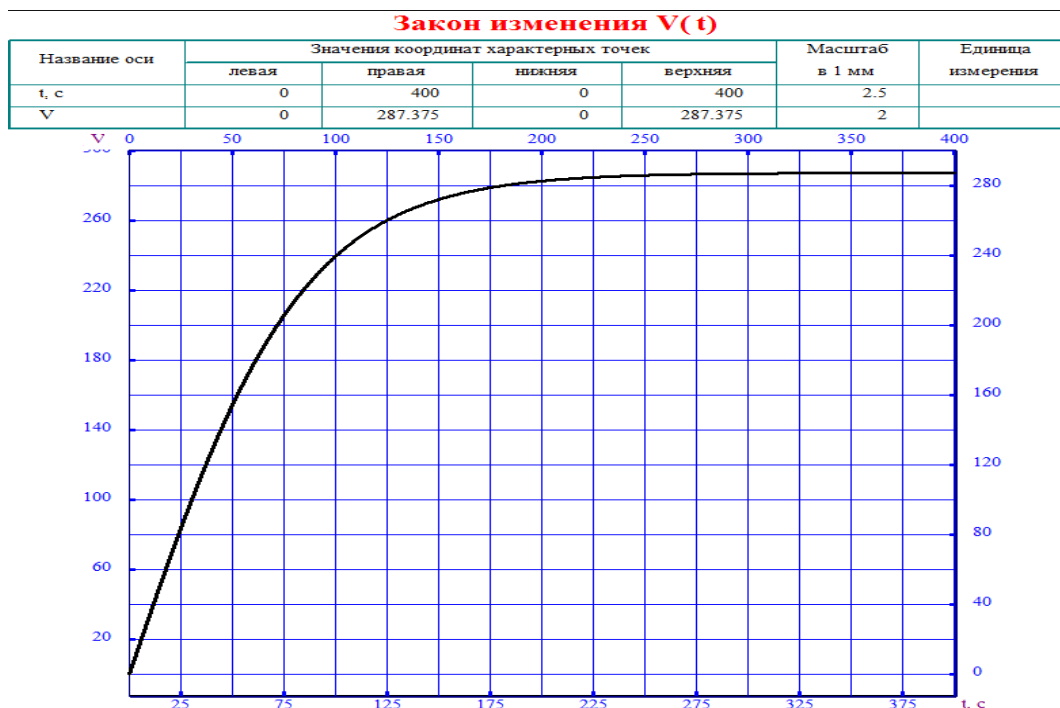


Рисунок 2. Зависимость от времени (с): а) максимального момента (Нм), скорости (км/час).

Наименьшее значение момента характеризует тот факт, что сила сопротивления движению стала равна предельному значению силы трения скольжения колеса. Только теперь к статической и динамической силам сопротивления прицепа добавилась сила

сопротивления воздуха. Поэтому для любых (не равных нулю) значений коэффициента сопротивления воздуха, значения максимального момента на концах интервала будут совпадать. Графики будут подобны графикам, приведенным на рис. 2, и отличаться только длиной интервала их изменения. Заметим также, что и значение ускорения в начале интервала также совпадает с ускорением, полученным для данной модели в [1].

2. Для выяснения характера зависимостей: силы трения скольжения ведущего колеса и скорости системы от времени, при величине вращающего момента, равной  $M = M_{[3,4]} = \delta mg + fmg r = 402 \text{ Нм}$  (задача 2) приведем их для коэффициента сопротивления  $\beta = 0.15$  (рис. 3).

Последовательными приближениями с точностью 1% было установлено время, за которое система достигает максимальной скорости. Для коэффициента сопротивления воздуха, равного 0.15 время при оптимальном задании вращающего момента составило 229 секунд, а для максимального момента, равного 402 Нм – 345 секунд, максимальная скорость 287 км/час. Соответствующие значения для коэффициента сопротивления воздуха, равного 0.25, составили 178 и 267 секунд, максимальная скорость 222 км/час.

Этим фактам есть вполне очевидное объяснение. При оптимальном задании вращающего момента сила трения скольжения ведущего колеса (сила тяги) максимальна на всем диапазоне движения, а при задании постоянного значения вращающего момента сила трения становится максимальной только в конце этого диапазона. Следовательно, в первом случае сила тяги используется наиболее эффективно. Поскольку максимальный момент по цитируемым источникам всегда меньше требуемого внутри интервала (до достижения максимально возможной скорости), то задание соответствующего значения момента всегда будет более эффективным по сравнению с цитируемым значением.

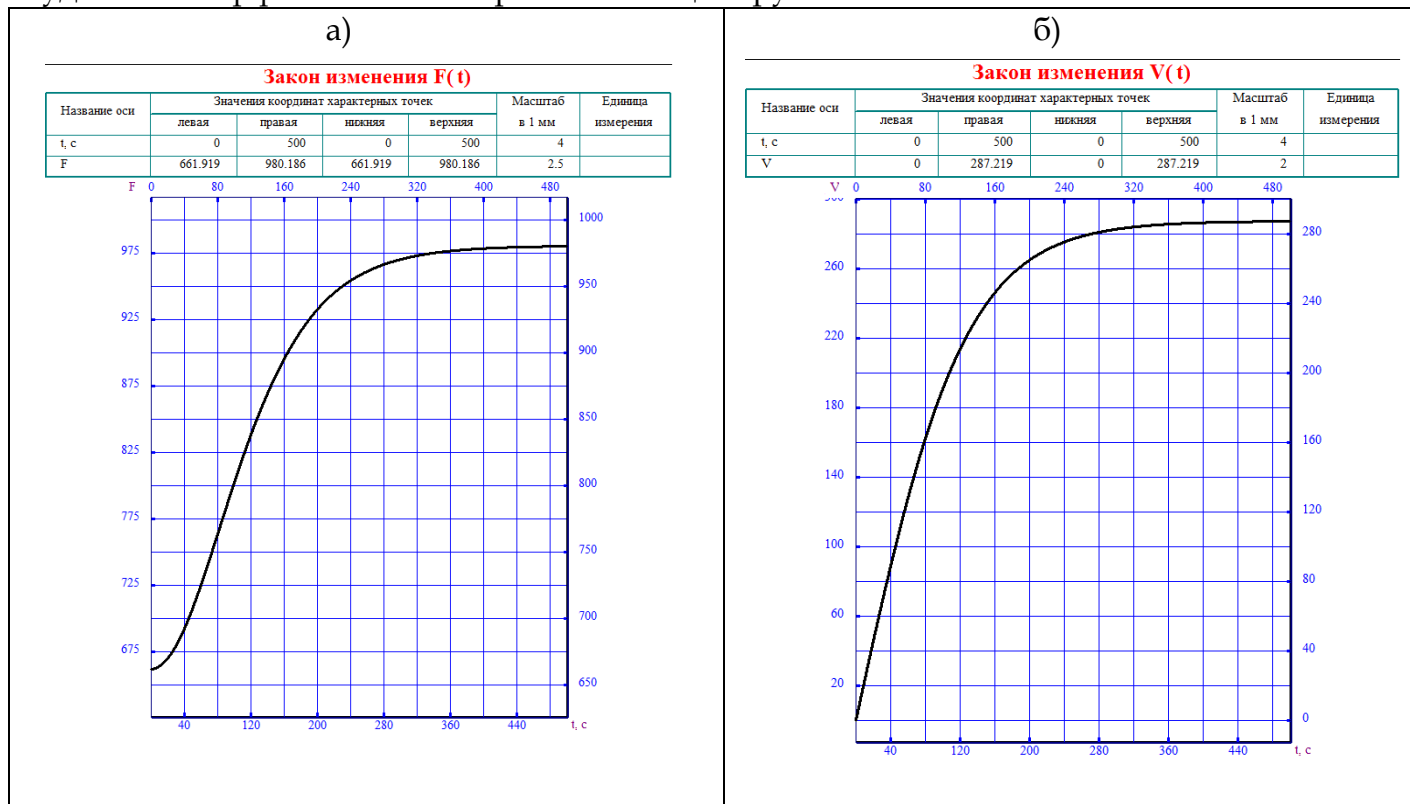


Рисунок 3. Зависимость от времени (с): а) силы трения скольжения ведущего колеса (Н), б) скорости (км/час).

Таким образом, в обоих случаях на всем интервале выполняется условие отсутствия скольжения ведущего колеса (сила его трения скольжения не превышает предельного значения). Возможно, именно этот факт и имели в виду авторы цитируемых источников,

поскольку методами статики другой вывод сделать невозможно. Их ошибка заключается в том, что они упустили тот интервал движения системы, на котором можно использовать преимущества динамического решения при оптимизации управления движением системой.

3. Выберем три значения требуемой скорости для коэффициента сопротивления воздуха 0.15: 60, 80, 100 км/час и определим время, необходимое для достижения этих скоростей при трех режимах задания вращающего момента: 1) оптимальном, 2) по [3,4] и 3) по постоянному моменту, но такому, при котором нет скольжения внутри заданного интервала. Для последнего варианта нужно предварительно найти требуемый вращающий момент. Если мы при оптимальном режиме найдем величины вращающих моментов, при которых достигается требуемая скорость, то это и будут нужные величины для третьего режима. Это понятно потому, что при оптимальном режиме график момента выпуклый и выбранное значение лежит в требуемом диапазоне, обеспечивающем качение без скольжения. Величины этих моментов для скоростей 60, 80 и 100 км/час равны, соответственно, 585, 578 и 570 Нм. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. Время для достижения требуемой скорости

Скорость, км/час	Вариант	Момент. Нм	Время, с
60	1	Оптимальный	17.71
	2	402	26.85
	3	585	17.86
80	1	Оптимальный	23.87
	2	402	35.82
	3	578	24.34
100	1	Оптимальный	30.34
	2	402	45.49
	3	570	31.18

Обратим внимание на следующее. Для 1-го и 2-го вариантов задания вращающего момента после достижения требуемой скорости дальнейшее движение будет продолжаться вместе с ростом скорости до тех пор, пока она не достигнет максимума (см. п. 2). Однако на всем интервале времени ведущее колесо будет катиться без скольжения. Для 3-го варианта – качение без скольжения будет происходить только до того момента, пока скорость меньше или равна требуемой величине. Дальнейшее движение колеса будет сопровождаться скольжением.

4. Если при достижении заданной скорости мы хотим, чтобы дальнейшее движение стало равномерным, необходимо уменьшить вращающий момент до соответствующей величины. Для определения этих величин вернемся к исходным уравнениям:

$$(m + m_p)\ddot{x} = F - f_p m_p g - \beta \dot{x}^2;$$

$$m r_c^2 \frac{\ddot{x}}{r} = M - \delta m g - F r.$$

Полагая для требуемого значения скорости ускорение равным нулю, имеем:

$$F = f_p m_p g + \beta \dot{x}^2; M = \delta m g + F r.$$

Значения соответствующих величин вращающего момента приведено в таблице 3.

Таблица 3. Величины вращающих моментов для последующего равномерного движения

Скорость, км/час (м/с)	$\beta$	Момент. Нм
60 (16.7)	0.15	36.3
	0.25	47.4

80 (22.2)	0.15	49.3
	0.25	69.0
100 (27.8)	0.15	66.0
	0.25	96.8

Полученное в рамках динамического подхода распределение максимально допустимых значений вращающего момента позволяет выбрать наиболее оптимальный режим нагружения ведущего колеса, при котором можно достичь требуемой скорости движения за минимальное время и с минимальными затратами. Таким образом ограничение на максимальное значение вращающего момента, полученное в [3,4] на основании статического подхода, не совсем корректно для движущейся системы и не позволяет обеспечить высокую эффективность управления ее движением.

#### **Выводы.**

1. Вывод, приведенный в [3,4], о значении максимального момента, который можно подвести к ведущему колесу, является верным в двух случаях:

1) В начале движения. Пусть статическая сила сопротивления прицепа превосходит предельную силу трения ведущего колеса. Тогда задание момента большего, чем максимальный, вызовет чистое буксование, и центр ведущего колеса попросту не придет в движение.

2) Пусть, при учете сопротивления воздуха, общая сила сопротивления с течением времени станет равной предельному значению силы трения скольжения ведущего колеса. Тогда задание момента большего максимального приведет к качению ведущего колеса со скольжением – пробуксовку.

2. Величины наибольших вращающих моментов, являющиеся при учете силы сопротивления воздуха функциями времени и обеспечивающие качение ведущего колеса без скольжения, могут существенно превосходить значения, которые авторами упоминаемых источников считаются максимально возможными и это позволяет управлять движением системы более рационально.

3. В учебных пособиях по теоретической механике следовало бы, на наш взгляд, указать на ограниченность применения методов статики к решению задач с учетом трения и некоторые из них, такие, как задачу о ведущем колесе, рассматривать в разделах, посвященных динамике.

#### **Список литературы:**

1. Тарсис Е.Ю. Статика и динамика в задачах с трением. Ведущее колесо. Научно-практический электронный журнал. Оригинальные исследования (ОРИС). 2022. №7. С. 91-99.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том второй. Динамика. Издание шестое, переработанное и дополненное. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 640 с.
3. Машиностроение. Энциклопедия в сорока томах. Том 1-2. Теоретическая механика термодинамика теплообмен. Москва «Машиностроение», 1999, 600 с.
4. Курс теоретической механики. Под редакцией К.С. Колесникова. 5-е издание, исправленное. Москва. Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2017. 580 с.



**References:**

1. Tarsis E.Yu. Statics and dynamics in problems with friction. Driving wheel. Scientific and practical electronic journal. Original research. 2022. No. 7. pp. 91–99.
2. Lojcyanskij L.G., Lure A.I. Kurs teoreticheskoy mehaniki. Vol. 2. Dinamika. Izdanie shestoe, pererabotannoe i dopolnennoe. Moskow «Nauka». Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury. 1983. 640 p.
3. Mashinostroenie. Enciklopediya v soroka tomah. Vol.1-2. Teoreticheskaya mekhanika termodinamika teploobmen. Moskow «Mashinostroenie», 1999, 600 p.
4. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Pod redakciej K.S. Kolesnikova. Izdanie tret'e, stereotipnoe. Moskow. Izdatel'stvo MGTU imeni N.E. Baumana, 2017. 580 p.