

УДК 69.04

**РАСЧЕТ РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН НА ДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ  
НАГРУЗОК АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ С ПРИМЕНЕНИЕМ  
ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ****Кешишьян Дмитрий Эдуардович**Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,  
магистрант**Аннотация**

В статье рассматривается применение аналитического метода расчета пластин, подкрепленных ребрами жесткости в двух направлениях при воздействии нагрузки по линии ребер. Сосредоточенные факторы в виде ребер и нагрузки по линии вводятся с помощью разрывных функций. Уравнение изгиба ребристых пластин решается как дифференциальные уравнения с импульсными коэффициентами, зависящими от разных переменных. Выполнены расчеты прогибов, моментов для ребристой пластины. Результаты расчетов при удержании малого числа членов ряда сравниваются с результатами, полученными методом конечных элементов.

**Ключевые слова:** ребристая пластина, локальные нагрузки, импульсные функции.**CALCULATION OF RIBBED PLATES FOR THE IMPACT OF LOCAL LOADS  
BY THE ANALYTICAL METHOD USING GENERALIZED FUNCTIONS****Dmitry E. Keshishian**

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, master student

**ABSTRACT**

The use of analytical calculation method for plates rib-stiffened in two directions under a load along the ribs is considered in the article. Lumped factors as ribs and longitudinal loads are introduced through discontinuous functions. The bending equation for ribbed plates is solved like differential equation with impulse ratio depending on different variables. Deflections and bending moments for ribbed plates have been calculated. Results of the calculations while retention small number of terms in the series have been compared with the results obtained by the FEM (finite element method).

**Keywords:** ribbed plate; local loads; impulse functions.

В процессе проектирования нередки случаи нагружения пластин вдоль линии. Рациональным видом подкрепления в этом случае является устройство под линией нагружения ребер жесткости.

Основным методом расчета конструкций, реализуемом на вычислительных машинах, является метод конечных элементов, где требуется сгущение сетки разбиения в местах локальных нагружений и усиления, из-за чего порядок системы уравнений метода значительно повышается.

В настоящее время аналитические решения постоянно совершенствуются, предлагается расчет по уточненной теории [5], применение безразмерных параметров [7], улучшаются вариационные методики [8]. Для быстрого нахождения точных решений предлагается применение метода наискорейшего спуска [6]. Несмотря на постоянное совершенствование, актуальным также остается и разработка простых с допустимой точностью методов, реализуемых в рамках обыденной строительной практики.

Для элементов с нарушениями регулярности, зонами сосредоточенных нагружений применение импульсных функций позволяет получить единое аналитическое решение для всей пластины, которое одинаково точно описывает напряженно-деформированное состояние как в однородной части, так и в зонах сосредоточенных факторов.

Будем рассматривать пластину, нагруженную вдоль линии и по площади. Пластина усилена ребрами жесткости в двух направлениях (рис. 1).

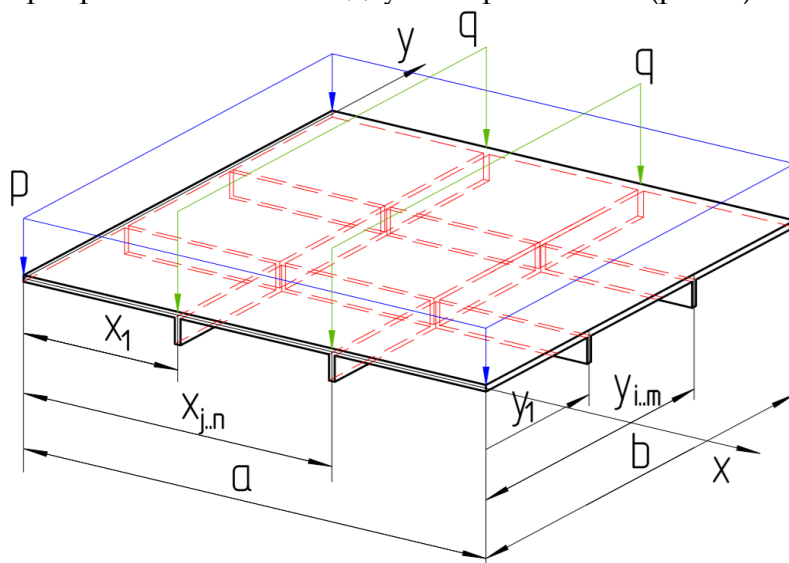


Рисунок 1. Подкрепленная пластина, нагруженная по линии  $q$ , по площади  $p$

С помощью разрывных импульсных функций, согласно [1] нагрузку вдоль линии  $q$  представим в виде:

$$q(x, y) = q(y)\delta(x - x_j),$$

где  $\delta(x - x_j)$  - дельта-функция Дирака;  $x_j$  - координата приложения нагрузки по  $x$ ;  $j$  - количество линий нагружения.

Для учета ребер, расположенных вдоль координатных линий, внутренние усилия и моменты выразим согласно [3]. Соппротивлением кручению ребер пренебрегаем из-за малой жесткости на кручение в сравнении с изгибной.

$$T_1^* = T_1 + \sum_i^m (E_i F_i u_x' + E_i S_i w_x'') \delta(y - y_i),$$

$$T_2^* = T_2 + \sum_j^n (E_j F_j v_y' + E_j S_j w_y'') \delta(x - x_j),$$

$$M_1^* = M_1 + \sum_i^m (E_i S_i u_x' + E_i I_i w_x'') \delta(y - y_i),$$

$$M_2^* = M_2 + \sum_j^n (E_j S_j v_y' + E_j I_j w_y'') \delta(x - x_j),$$

где  $T_1, T_2, M_1, M_2$  – усилия и моменты гладкой части пластины;

$T_1^*, T_2^*, M_1^*, M_2^*$  – усилия и моменты, возникающие в ребристой пластине;

$E_j, F_j, S_j, I_j$  – характеристики ребер, параллельных оси  $y$ ;  $E_i, F_i, S_i, I_i$  – характеристики ребер, параллельных оси  $x$  (соответственно, модуль упругости, площадь сечения, статический момент площади, осевой момент инерции).  $u_x', v_y', w_x'', w_y''$  – частные производные от перемещений по соответствующим направлениям.

С помощью известных соотношений упругости перейдем от уравнений равновесия, записанных в усилиях (1), к уравнениям относительно функций перемещения  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  и  $w(x, y)$  (2), вывод взят согласно [4].

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1^*}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial T_2^*}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial M_1^*}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_2^*}{\partial y} = p \quad (1)$$

где  $S, H$  – поперечные усилия и крутящий момент, возникающие в ребристой пластине;  $p$  – нагрузка.

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{B} \sum_i^m \left( (E_i F_i u_x' + E_i S_i w_x'') \delta'(y - y_i) + \frac{1 - \mu}{2} (E_i F_i u_x''' + E_i S_i w_x^{IV}) \delta(y - y_i) \right) + \frac{1 + \mu}{2B} \sum_j^n (E_j S_j v_y'' + E_j I_j w_y''') \delta'(x - x_j)$$

$$\nabla^2 v = \frac{1 + \mu}{2B} \sum_i^m ((E_i F_i u_x'' + E_i S_i w_x''') \delta'(y - y_i)) - \frac{1}{B} \sum_j^n ((E_j S_j v_y' + E_j I_j w_y'') \delta''(x - x_j) + \frac{1 - \mu}{2} (E_j S_j v_y''' + E_j I_j w_y^{IV}) \delta(x - x_j))$$

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} (p - \sum_i^m E_i (I_i w_x^{IV} + S_i u_x''') \delta(y - y_i) - \sum_j^n E_j (I_j w_y^{IV} + S_j v_y''') \delta(x - x_j)) \quad (2)$$

где  $B$  – жесткость пластины;  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

В рамках данного исследования рассматривается возможность пренебрежения влиянием ребер на продольные и сдвигающие усилия, так как это при незначительном уменьшении точности значительно упрощает решение задачи. В результате система уравнений (2) заменяется одним уравнением относительно прогиба:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} (p - \sum_i^m E_i I_i w_y^{IV} \delta(y - y_i) - \sum_j^n E_j I_j w_y^{IV} \delta(x - x_j)) \quad (3)$$

где  $w(x, y)$  – функция прогиба;  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $x_j, n$  – координаты и количество ребер параллельных оси  $y$ ;  $y_i, m$  – координаты и количество ребер параллельных оси  $x$ .

Найдем решение дифференциального уравнения с импульсными коэффициентами, зависящими от разных переменных:

$$L\varphi = p - L_1 \varphi \delta(x - x_1) - L_2 \varphi \delta(y - y_1) \quad (4)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами 4-го порядка,  $L_1$  и  $L_2$  – линейные дифференциальный операторы, имеющие порядок не выше

порядка оператора  $L$ . Для плиты, шарнирно опертой по контуру, (4) решается согласно [1] путем разложения искомой функции  $\varphi$  в ряд по синусам по обеим переменным. В результате получим для первого члена ряда выражение:

$$\varphi = \varphi^0 - l_1 \varphi_x(x_1) \psi_x \sin(\beta y) - l_2 \varphi_y(y_1) \psi_y \sin(\alpha x). \quad (5)$$

Здесь:  $\varphi_x(x_1)$  - первый член в разложении функции по координате  $y$  при  $x = x_1$ ;

$\varphi_y(y_1)$  - первый член в разложении функции по координате  $x$  при  $y = y_1$ ;

$\varphi^0$  - решение уравнения  $L\varphi^0 = p_{11} \sin(\beta y) \sin(\alpha x)$ ,  $\varphi^0 = \varphi_{11}^0 \sin(\beta y) \sin(\alpha x)$ ;

$\psi_x$  - решение уравнения  $L\psi_x = \delta(x - x_1)$ ;  $\psi_y$  - решение уравнения

$$L\psi_y = \delta(y - y_1).$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $l_1 \varphi_x(x_1)$  и  $l_2 \varphi_y(y_1)$  воздействуем оператором  $\int_0^b (\dots) L_1 \sin(\beta y) dy$  на левую и правую часть равенства (5), тогда при  $x = x_1$

$$l_1 \varphi_x(x_1) = l_1 \varphi_{11}^0 \sin(\alpha x_1) - l_1 \varphi_x(x_1) l_1 \psi_x(x_1) - l_2 \varphi_y(y_1) l_1 \overline{\psi}_y \sin(\alpha x_1). \quad (6)$$

Применяя к равенству (5) оператор  $\int_0^a (\dots) L_2 \sin(\alpha x) dx$  при  $y = y_1$  имеем

$$l_2 \varphi_y(y_1) = l_2 \varphi_{11}^0 \sin(\beta y_1) - l_1 \varphi_x(x_1) l_2 \overline{\psi}_x \sin(\beta y_1) - l_2 \varphi_y(y_1) l_2 \psi_y(y_1). \quad (7)$$

Здесь  $l_1$  - результат воздействия оператора  $L_1$  на  $\sin(\beta y)$ ;  $l_2$  - результат воздействия оператора  $L_2$  на  $\sin(\alpha x)$ ;  $\overline{\psi}_y = \int_0^b \psi_y \sin(\beta y) dy$ ,  $\overline{\psi}_x = \int_0^a \psi_x \sin(\alpha x) dx$ . Решая систему уравнений (6) и (7), находим неизвестные коэффициенты  $l_1 \varphi_x(x_1)$  и  $l_2 \varphi_y(y_1)$ .

Для рассматриваемой ребристой пластины найдем коэффициенты на пересечениях ребер  $w_j$  и  $w_i$  в виде

$$\begin{cases} w_j = w^0 \sin(\alpha_l x_j) - w_j \frac{1}{D} \sum_j^n I_j E_j \beta_k^4 \psi_j - w_i \frac{1}{D} \sum_i^m I_i E_i \alpha_l^4 \overline{\psi}_y \sin(\alpha_l x_j) \\ w_i = w^0 \sin(\beta_k y_i) - w_j \frac{1}{D} \sum_j^n I_j E_j \beta_k^4 \overline{\psi}_x \sin(\beta_k y_i) - w_i \frac{1}{D} \sum_i^m I_i E_i \alpha_l^4 \psi_i \end{cases} \quad (8)$$

Тогда общее выражение для прогиба ребристой плиты [2]

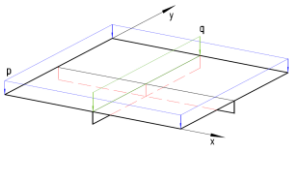
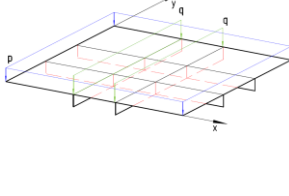
$$w = w^0 \sin(\alpha_l x_j) \sin(\beta_k y_i) - w_j \frac{1}{D} \sum_j^n I_j E_j \beta_k^4 \psi_j \sin(\beta_k y) - w_i \frac{1}{D} \sum_i^m I_i E_i \alpha_l^4 \psi_i \sin(\alpha_l x). \quad (9)$$

Система уравнений (8) имеет порядок  $n + m$ . Нахождение прогиба по формуле (9), при удержании трех членов ряда по одному направлению и одного по другому (при  $k=1, 3, 5; l=1$ ) сводится к решению трех независимых систем порядка  $n + m$ . В данной работе проверка решения и анализ результатов выполнялся в Mathcad. Результатом работы стала разработка алгоритма, который был проверен посредством расчетов.

Результаты расчетов прогибов по изложенной выше методике для двух расчетных схем ребристых плит в сравнении с МКЭ приведены в таблице 1.

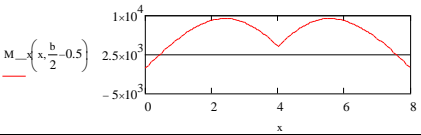
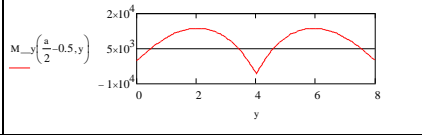
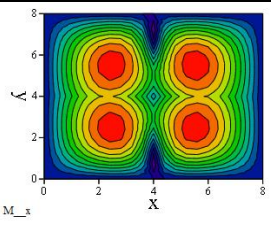
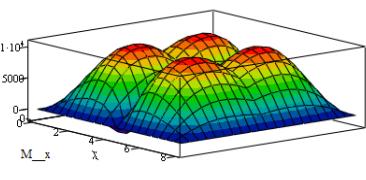
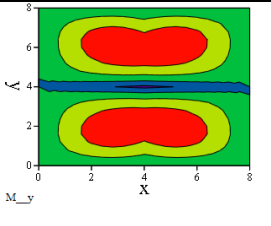
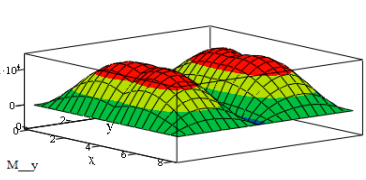
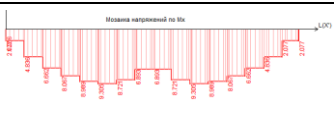

Таблица 1

Расчетная схема	x , м	y , м	Прогиб, w (мм)				(w <sub>МКЭ</sub> - w <sub>ан</sub> ) / w <sub>МКЭ</sub>   100, %
			Аналитическое решение		МКЭ		
			1чл.р.	3чл.р.	0.5 x 0.5	0.1 x 0.1	

	$a = 8 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, h = 0.12 \text{ м}, \mu = 0.16$ $E = 3.2 \cdot 10^7 \text{ кПа}$ $p = 15 \text{ кН/м}^2,$ $q = 20 \text{ кН/м}$ $h_R = 0.5 \text{ м}, x_1 = 4 \text{ м}, y_1 = 4 \text{ м}$	4	4	11.9	12.0	12.2	13.4	3	1
		4	3	11.9	12.1	11.4	12.6	4	4
	$a = 8 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, h = 0.12 \text{ м}, \mu = 0.16$ $E = 3.2 \cdot 10^7 \text{ кПа}$ $p = 15 \text{ кН/м}^2,$ $q = 20 \text{ кН/м}$ $h_R = 0.5 \text{ м}, x_1 = 3 \text{ м}, y_1 = 3 \text{ м}, x_1 = 5 \text{ м}, y_1 = 5 \text{ м}$	4	4	9.44	9.4	9.27	10.1	2	7
		3	3	8.12	8.14	7.94	8.7	2	6

Графики моментов, определенных для первой расчетной схемы табл. 1 аналитическим методом при удержании трех членов ряда в сравнении с МКЭ представлены в табл. 2.

Таблица 2

$M_x$ $(x, b/2-0.5)$  $M_y$ $(a/2-0.5, y)$  Аналитически		
	 	 
МКЭ (сетка 0.5 x 0.5)		

Из табл. 1 видно, что результаты, полученные аналитическим методом, сопоставимы с результатами, полученными методом конечных элементов. Разница между аналитическим методом при удержании 1 члена ряда и МКЭ на сетке 0.5 x 0.5 м составляет не более 4%; при удержании 3-х членов ряда и МКЭ на сетке 0.1 x 0.1 м составляет не более 11%. Благодаря введению разрывных функций непосредственно в решения дифференциальных уравнений функциональные ряды быстро сходятся, при чем не только в гладкой части, но и в зонах особенностей.

Графики из таблицы 2 отражают характер распределения изгибающих моментов, зависящих от производных импульсных функций.

По итогам расчетов, даже при пренебрежении влиянием ребер на сдвигающие и продольные усилия и удержании всего трех членов ряда получаются результаты, близкие



с МКЭ, при этом вблизи сосредоточенных факторов, благодаря наличию разрывных функций, компоненты напряженно-деформированного состояния определяются с той же точностью, как и в зоне плавного изменения нагрузки. При этом для увеличения точности результатов, получаемых МКЭ, необходимо в зонах концентрации напряжений сгущать сетку разбивки, что приводит к увеличению порядка системы уравнений.

### Список литературы

1. Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. – Л.: ЛГУ, 1980. – 196 с.
2. Кобелев Е.А. Изгиб пластин, соединенных системой перекрестных ребер // Строительная механика сооружений: Межвуз. темат. сб. тр. / ЛИСИ. – Л., 1986. – С. 99-104.
3. Гребень Е.С. Основные соотношения технической теории ребристых оболочек. // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 3. – С. 81-92.
4. Кобелев Е.А. Изгиб пластин с разрезами и прямоугольными отверстиями, подкрепленными ребрами: Дис...канд. техн. наук. – Л.: ЛИСИ, 1984. – 208 с.
5. Фирсанов В.В. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории / В.В. Фирсанов, А.Х. Во // Труды МАИ. – 2018. – №102.
6. Петров В.В. Расчет конструкций переменной толщины методом наискорейшего спуска / В.В. Петров, Д.А. Пименов, Р.В. Мищенко // Научный журнал "ACADEMIA. АРХИТЕКТУРА И СТРОИТЕЛЬСТВО". – 2018. – №2. – С. 137-142.
7. Семенов А.А., Панин А.Н. Эффективность использования безразмерных параметров при расчете прочности и устойчивости подкрепленных пологих оболочек / А.А. Семенов, А.Н. Панин // Академический вестник УРАЛНИИПРОЕКТ РААСН. – 2015. – №3. – С. 73-76.
8. Карпов В.В. Напряженно-деформированное состояние ребристых оболочечных конструкций / В.В. Карпов, О.В. Игнатьев, А.А. Семенов // Инженерно-строительный журнал. – 2017. – № 6(74). – С. 147-160.

### References

1. Mikhailov B.K. Plastiny i obolochki s razryvnymi parametrami [Plates and shells with discontinuous parameters]. – L.: LGU, 1980. – 196 p. [in Russian].
2. Kobelev E.A. Izgib plastin, soedinennykh sistemoi perekrestnykh reber [Bending of plates connected by a cross ribbing system] // *Stroitel'naya mekhanika sooruzhenii: Mezhevuz. temat. sb. tr. [Structural Mechanics: Interuniversity Thematic Collected Works]* / LISI. – L., 1986. – Pp. 99-104 [in Russian].
3. Greben' E.S. Osnovnye sootnosheniya tekhnicheskoi teorii rebristykh obolochek [The main relations of the technical theory of ribbed shells] // *Izv. AN SSSR. Mekhanika [News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics]*. – 1965. – No. 3. – Pp. 81-92 [in Russian].
4. Kobelev E.A. Izgib plastin s razrezami i pryamougol'nymi otverstiyami, podkreplennymi rebrami: Dis...kand. tekhn. nauk [Bending plates with sections and rectangular apertures supported by ribs: PhD thesis]. – L.: LISI, 1984. – 208 p. [in Russian].
5. Firsanov V.V. Issledovanie prodol'no podkreplennykh tsilindricheskikh obolochek pod deistviem lokal'noi nagruzki po utochnennoi teorii [Investigation of longitudinally reinforced cylindrical shells under local load according to a refined theory] / V.V. Firsanov, A.Kh. Vo // *Trudy MAI [Proceedings of MAI]*. – 2018. – No. 102 [in Russian].
6. Petrov V.V. Raschet konstruktsii peremennoi tolshchiny metodom naiskoreishego spuska [Calculation of variable thickness structures using the method of steepest descent] / V.V.

- Petrov, D.A. Pimenov, R.V. Mishchenko // *Nauchnyi zhurnal "ACADEMIA. ARKHITEKTURA I STROITEL'STVO"* [Scientific Journal "ACADEMIA. ARCHITECTURE AND CONSTRUCTION"]. – 2018. – No. 2. – Pp. 137-142 [in Russian].
7. Semenov A.A., Panin A.N. Ehffektivnost' ispol'zovaniya bezrazmernykh parametrov pri raschete prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh pologikh obolochek [Efficiency of using dimensionless parameters in calculating the strength and stability of reinforced sloping shells] / A.A. Semenov, A.N. Panin // *Akademicheskii vestnik URALNIIPROEKT RAASN* [Academic Bulletin of The URALNIIPROEKT Russian Academy of Architecture and Construction Sciences]. – 2015. – No. 3. – Pp. 73-76 [in Russian].
  8. Karpov V.V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie rebristykh obolochechnykh konstruksii [Stress-strain state of ribbed shell structures] / V.V. Karpov, O.V. Ignat'ev, A.A. Semenov // *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal* [Civil Engineering Journal]. – 2017. – No. 6(74). – Pp. 147-160 [in Russian].